

## UN ENFOQUE ITERATIVO PARA LA ASIGNACIÓN DINÁMICA DE TRÁFICO URBANO: MODELO DISCRETO

### AN ITERATIVE APPROACH TO DYNAMIC URBAN TRAFFIC ASSIGNMENT: DISCRETE MODEL

Patricia N. Dominguez<sup>a,b</sup> y Víctor H. Cortínez<sup>a,b,c</sup>

<sup>a</sup> Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada CIMTA, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina,  
[vcortine@hotmail.com](mailto:vcortine@hotmail.com)

<sup>b</sup> Universidad Nacional del Sur, Departamento de Ingeniería, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, [pdoming@uns.edu.ar](mailto:pdoming@uns.edu.ar)

<sup>c</sup>Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET

**Palabras clave:** tráfico congestionado, asignación dinámica, modelo Physarum.

**Resumen.** La asignación de tráfico congestionado tiene como objetivo determinar la distribución del tránsito y los tiempos de viaje en una red urbana. En condiciones estacionarias, el problema se modela siguiendo el principio de Wardrop, según el cual cada usuario elige su ruta minimizando su propio tiempo de viaje, lo que conduce a un problema de optimización de gran escala. En los últimos años, se ha propuesto un enfoque iterativo denominado modelo *Physarum*, que ha demostrado ser eficiente para la resolución de este tipo de problemas. En este trabajo, dicho modelo se extiende para abordar la asignación dinámica de tráfico, incorporando la variación temporal de la demanda y de las características del flujo vehicular. Se presenta la formulación propuesta, junto con resultados numéricos que ilustran su eficiencia.

**Keywords:** congested traffic, dynamic assignment, Physarum model.

**Abstract.** Congested traffic assignment aims to determine how traffic is distributed and what the travel times are within an urban network. Under stationary conditions, the problem is modeled following Wardrop's principle, whereby each user seeks to minimize their own travel time, leading to a large-scale optimization problem. Recently, an iterative approach known as the Physarum model has been proposed and shown to be effective in solving such problems. In this work, the model is extended to address dynamic traffic assignment, which accounts for variations in demand and traffic characteristics over time. The formulation is presented along with numerical results that illustrate its efficiency.

## 1 INTRODUCCIÓN

La asignación de tráfico congestionado es un problema fundamental en la planificación urbana. Consiste en determinar la distribución del tráfico en las arterias de la ciudad y los tiempos de viaje de los usuarios en un período del día determinado. Para ello, en la versión estacionaria del problema, se considera conocida tanto la estructura de la red como las tasas horarias de generación de viajes asumiendo que éstas permanecen constantes dentro del período analizado. La solución de este problema de equilibrio sigue el primer principio de Wardrop, el cual establece que cada usuario elige su ruta minimizando su propio tiempo de viaje (Boyles et al., 2023). Típicamente, esto conduce a un problema de optimización en gran escala. Recientemente, se ha desarrollado un método efectivo para analizar este problema mediante un enfoque iterativo denominado modelo Physarum (Xu et al., 2018; Dominguez et al., 2023).

Por otra parte, considerando, que en entornos urbanos complejos, la demanda de tráfico, y consecuentemente el flujo de vehículos, puede variar significativamente a lo largo del día e incluso durante un mismo viaje, se han desarrollado modelos de asignación dinámica (Boyce et al., 1999; Wang et al., 2018). El problema de asignación dinámico tiene un alto costo computacional comparado con el estático. Por tal motivo, algunos autores han propuesto modelos intermedios denominados enfoques de asignación semi-dinámica. En éstos, el período de análisis se divide en varios subintervalos de tiempo dentro de los cuales se asume que la red alcanza un estado de equilibrio. Además, se tiene en cuenta la propagación de los flujos residuales, es decir, aquellos viajes que se inician en un subintervalo y concluyen en el siguiente (Nakayama et al., 2012; Koike et al., 2022). El enfoque de solución se reduce a una sucesión de problemas de asignación estática, aunque intercambiando información entre un subperíodo con el siguiente. Recientemente, los autores (Dominguez y Cortínez, 2025) han propuesto la aplicación del método Physarum al problema de asignación semi dinámica.

Si bien el enfoque semi dinámico resulta simple desde el punto de vista computacional, presenta algunas limitaciones, por ejemplo, la duración de cada período debe ser lo suficientemente larga, tal que la mayor parte de la demanda de viajes alcance su destino en el mismo período de partida (Nakayama et al., 2012), lo que no siempre es factible en grandes distancias urbanas. En tales casos, es inevitable abordar el problema de asignación dinámica completa.

En este trabajo, el modelo Physarum se generaliza para la solución del problema de asignación dinámica. En el artículo, se presenta la formulación estática de tráfico urbano basada en un sistema de ecuaciones algebraico no lineal, así como el esquema de solución iterativa basada en el método Physarum. A continuación se muestra la generalización del modelo para el caso de asignación dinámica y, entonces, se presenta la adaptación del enfoque Physarum a esta situación dinámica. También se presentan algunos ejemplos numéricos simples para ilustrar la metodología.

## 2 ASIGNACIÓN ESTÁTICA DE TRÁFICO

### 2.1 Formulación multidestino

Se considera una red urbana de tráfico donde los usuarios viajan desde determinados puntos (orígenes de viajes) de la ciudad hacia ciertos puntos de destino  $d$  ( $d=1, 2, \dots, Nd$ ). Se conoce la topología de la red, asumida por un conjunto de arcos dirigidos  $a$  ( $a=1, 2, \dots, Na$ )

conectados por nodos  $j$  ( $j=1,2,\dots,Nn$ ) y las características de cada arco (capacidad, longitud, velocidad máxima permitida). El sentido de circulación obligatorio en cada arco se define mediante  $\lambda_{ij}$  que es igual a 1 si el sentido de circulación es de  $i$  hacia  $j$  y -1 si va en sentido contrario (Figura 1c). Asimismo, se conoce la tasa horaria de generación de viajes  $Q_j^d$  (veh/h) en cada nodo  $j$  de la red hacia los diferentes destinos  $d$ . El problema de asignación de viajes consiste en obtener los flujos horarios  $g_a^d$  (veh/h) en cada arco  $a$  hacia cada destino  $d$ , de acuerdo a la selección de ruta de los usuarios y los tiempos de viaje  $U_j^d$  (h) desde cada nodo  $j$  al correspondiente destino  $d$ . Se asume tráfico en condiciones de equilibrio. Una formulación habitual para este problema conduce a un problema de optimización en gran escala, conocido como problema de Beckman (Boyles et al., 2023).

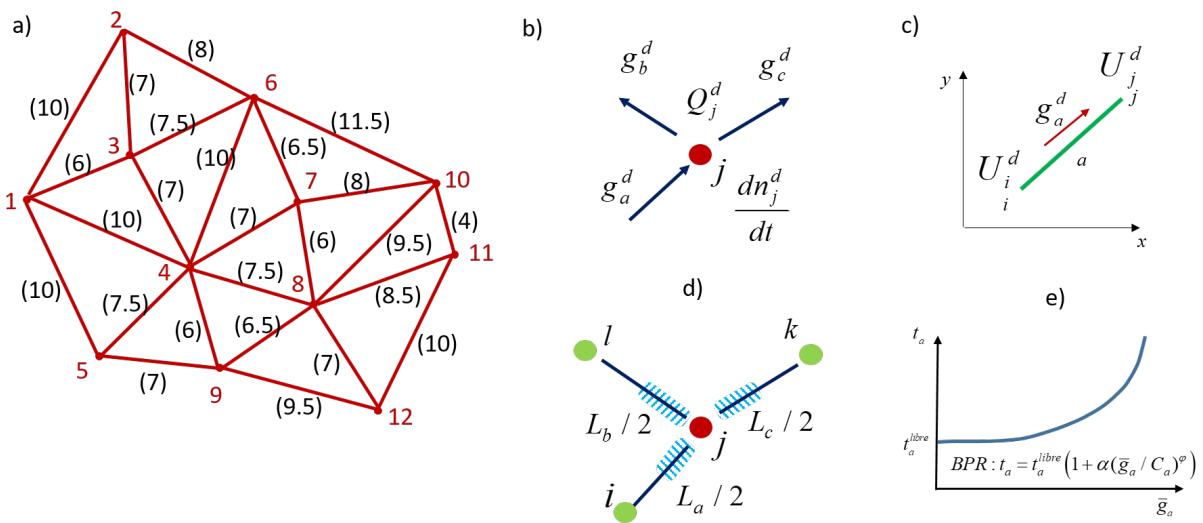


Figura 1: a) Esquema de la red, b) conservación vehicular en el nodo, c) arco entre nodos, d) área asociada al nodo  $j$  y e) función de tiempo de viaje BPR.

Aquí se presenta una formulación alternativa basada en un sistema de ecuaciones algebraico no lineal, que evita algunas de las limitaciones que presenta la formulación de Beckman (Cortínez y Dominguez, 2017; Dominguez et al., 2023). Tal enfoque, se plantea de la siguiente manera:

$$t_a = H_a(G_a), \quad G_a = \sum_{d=1}^{Nd} g_a^d, \quad (1)$$

$$\sum_{a \in R_j} \pm g_a^d + Q_j^d = 0, \quad j = 1, 2, \dots, Nn \quad d = 1, 2, \dots, Nd \quad (2)$$

$$g_a^d = \xi_a^d \frac{g_a^d}{H_a(\sum g_a^d)} (U_i^d - U_j^d), \quad \xi_a^d = \begin{cases} 1 & \lambda_{ij} (U_i^d - U_j^d) > 0 \\ 0 & \lambda_{ij} (U_i^d - U_j^d) \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$U^d(x_d, y_d) = 0, \quad (4)$$

donde  $H_a$  es la función de costo, generalmente el tiempo de recorrido de arco, que es una función creciente empírica del flujo total en cada arco  $G_a$ , como muestra la expresión (1), reflejando el efecto de congestión vehicular (Figura 1e).

La ecuación (2) corresponde a la conservación vehicular en cada nodo, siendo  $R_j$  el conjunto de arcos adyacentes al nodo  $j$  (Figura 1b). La expresión (3) indica que el flujo se dirige en el sentido decreciente del tiempo de viaje y la (4) indica que, por definición, el tiempo de viaje en el destino final es nulo. Debe observarse que la ecuación (3) implica que  $U_i^d - U_j^d = H_a$ , que es una de las maneras de postular el primer principio de Wardrop (Dominguez et al., 2023).

El sistema (2-4) constituye el sistema gobernante algebraico no lineal con  $Nd(Nn+Na)$  incógnitas:  $g_a^d$  y  $U_j^d$ . Una vez resuelto se pueden obtener  $H_a$  y  $G_a$  a partir de (1). Esta formulación es similar a la del modelo de complementariedad de Ferris et al. (Ferris et al. 1999; Bagloee et al., 2017).

## 2.2 Esquema de solución iterativa: Método Physarum

Una forma conveniente de resolver el sistema anterior es a partir de su reformulación como un problema de valor inicial (algoritmo Physarum) (Xu et al., 2018; Dominguez et al., 2023):

$$\sum_{i \in P_j} M_a^d (\bar{U}_i^d - \bar{U}_j^d) + Q_j^d = 0, \quad (5)$$

$$\bar{U}_d^d = 0, \quad (6)$$

$$\bar{g}_a^d = M_a^d (\bar{U}_i^d - \bar{U}_j^d), \quad (7)$$

$$\frac{dM_a^d}{ds} = \frac{\bar{g}_a^d \bar{\xi}_a^d}{H_a \left( \sum_d \bar{g}_a^d \bar{\xi}_a^d \right)} - M_a^d, \quad (8)$$

$$M_a^d(0) = M_a^{*d}, \quad s \in [0, +\infty), \quad a = 1, 2, \dots, Na, \quad d = 1, 2, \dots, Nd. \quad (9)$$

donde  $P_j$  corresponde al número de nodos adyacentes al nodo  $j$ .  $\bar{U}_j^d(s)$  y  $\bar{g}_a^d(s)$  son aproximaciones a las incógnitas del problema original.  $M_a^d(s)$  representa la conductividad hacia  $d$  en el arco  $a$  y evoluciona de acuerdo a la ecuación diferencial (8).

La solución asintótica ( $s \rightarrow +\infty$ ) del sistema (5-9) corresponde al problema de equilibrio de usuario (ecuaciones 1-4). En efecto, cuando  $s \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{dM_a^d}{ds} \rightarrow 0$ , lo que en virtud de (8)

implica que  $M_a^d \rightarrow \bar{g}_a^d \bar{\xi}_a^d / \left( H_a \left( \sum_d \bar{g}_a^d \bar{\xi}_a^d \right) \right)$  y entonces, desde (5-7) surge la verificación de las ecuaciones (1-3).

Luego,  $\bar{U}_j^d(s)$  y  $\bar{g}_a^d(s)$  tienden a  $U_j^d$  y  $g_a^d$  cuando  $s \rightarrow +\infty$ . Desde el punto de vista

práctico, las ecuaciones (8) se aproximan mediante diferencias finitas (Dominguez et al., 2023), lo que conduce a un esquema iterativo de solución. La convergencia de esta metodología es rápida, cualesquiera sean los valores iniciales  $M_a^{*d}$ .

### 3 ASIGNACIÓN DINÁMICA DE TRÁFICO

#### 3.1 Formulación multidestino general de asignación dinámica

A continuación se generaliza la formulación multidestino (1-4) a la situación dinámica, es decir, ahora las tasas horarias de generación de viajes en cada nodo resultan dependientes del tiempo  $Q_j^d = Q_j^d(t)$ . De esta manera, tanto los flujos  $g_a^d$  como los tiempos de viaje  $U_j^d$  también lo son. En el caso dinámico, la ecuación de conservación vehicular en cada nodo (2) se modifica para permitir la posibilidad de acumulación temporal de vehículos  $n_j^d$  en el espacio asociado a cada nodo  $j$ :

$$\sum_{i \in P_j} \frac{g_a^d}{H_a \left( \sum_d g_a^d \xi_a^d \right)} (U_i^d - U_j^d) + Q_j^d = \frac{dn_j^d}{dt} \quad (10)$$

En este modelo se asume, de manera simplificada, que el número de vehículos hacia un destino  $d$  en cada arco  $n_a^d$ , está uniformemente distribuido en el mismo. Consecuentemente, el número de vehículos asociado a nodo  $j$  corresponde a la mitad de las sumas de vehículos existentes en los arcos aledaños. Es decir, el área de influencia de cada nodo  $j$  se extiende hasta las mitades de las longitudes de los arcos aledaños (Figura 1d). En consecuencia, se puede expresar

$$n_j^d = \sum_{a \in R_a} n_a^d / 2 \quad (11)$$

Por definición, el flujo es igual al producto entre la densidad vehicular y la velocidad ( $n_a^d / L_a$ ), y la velocidad  $v_a = L_a / H_a$ , que en este trabajo, se asume uniforme en el tramo para cada tiempo  $t$ . Por lo tanto, se puede expresar:

$$n_a^d = g_a^d H_a \quad (12)$$

A partir de (11) y (12) se puede expresar el número de vehículos en cada nodo en términos de los flujos asociados a los arcos concurrentes:

$$n_j^d = \sum_{a \in R_a} g_a^d H_a / 2 \quad (13)$$

Por lo tanto, el modelo dinámico queda formulado con las ecuaciones (1), (10), (13), (3) y (4). Además debe tenerse en cuenta la condición inicial correspondiente al número de vehículos en cada arco hacia cada destino  $n_a^d(0)$  (o equivalentemente  $g_a^d(0)$ ).

Debe observarse que en la formulación presentada se admite la validez de la ecuación

(1) para el tiempo de recorrido de arco como una función creciente de igual manera que en el problema de asignación estática. Esto restringe el fenómeno a regímenes no sobrecongestionados (efecto de embotellamiento). Para considerar los mismos, debería adoptarse una función de tiempo de arco dependiente de la densidad vehicular.

La verificación de la ecuación (3) implica que la igualdad  $U_i^d - U_j^d = H_a$  se verifica instantáneamente, lo que equivale a decir que los usuarios eligen las rutas que minimizan su tiempo de viaje. Tal criterio de elección de ruta se denomina estrategia de elección de ruta reactiva. Es razonable asumir tal criterio cuando los conductores cuentan con información en tiempo real (GPS, aplicaciones de navegación, etc.)

### 3.2 Esquema iterativo de solución: Enfoque Physarum

Para adaptar la estrategia de solución expuesta en la sección 2.2 se divide el período de tiempo considerado en subintervalos pequeños  $\Delta t$ . En cada uno de los mismos las ecuaciones del problema dinámico se resuelven con el esquema Physarum hasta convergencia. Entonces, se pasa al cálculo del período siguiente tomándose como aproximaciones iniciales las que se acaban de calcular en el subperíodo corriente. A continuación se muestra el correspondiente esquema de cálculo.

- Para el tiempo  $t$  se conocen  $M_a^{d*}(t - \Delta t)$ ,  $n_j^d(t - \Delta t)$  y  $\bar{Q}_j^d(t - \Delta t)$ .
- Se resuelven los  $Nd$  sistemas algebraicos lineales:

$$\sum_{i \in P_j} M_a^d (\bar{U}_i^d - \bar{U}_j^d) + \bar{Q}_j^d = 0, \quad (14)$$

Esta ecuación corresponde a una aproximación en diferencias finitas temporales de la expresión (10).

- Una vez obtenidos  $\bar{U}_j^d$  se obtiene una nueva aproximación para los flujos:

$$\bar{g}_a^d(t) = M_a^d (\bar{U}_i^d - \bar{U}_j^d), \quad (15)$$

d) Empleando diferencias finitas implícitas para la ecuación (8), se obtiene una nueva aproximación para  $M_a^d(t)$  y, de la misma manera, usando (12) una nueva aproximación de  $\bar{n}_a^d(t)$ :

$$M_a^d(t) \leftarrow \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{g}_a^d \bar{\xi}_a^d}{H_a \left( \sum_d \bar{g}_a^d \bar{\xi}_a^d \right)} + M_a^d \right) \quad (16)$$

$$\bar{n}_a^d(t) \leftarrow \frac{1}{2} (\bar{g}_a^d H_a + \bar{n}_a^d) \quad (17)$$

- con los nuevos valores de  $\bar{n}_a^d$  se calculan el número de vehículos asignado al nodo  $j$  y la nueva tasa de generación efectiva:

$$\bar{n}_j^d(t) \leftarrow \sum_{a \in R_a} \bar{n}_a^d / 2 \quad (18)$$

$$\bar{Q}_j^d(t) \leftarrow Q_j^d(t) - \frac{\bar{n}_j^d(t) - \bar{n}_j^d(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (19)$$

f) con los valores de  $M_a^d(t)$  y  $\bar{Q}_j^d(t)$  calculados en la última iteración se vuelve al paso b) y se itera hasta convergencia y se repiten los cálculos para el próximo subperíodo  $t + \Delta t$ .

#### 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se aplica el modelo descripto a una pequeña red compuesta por 12 nodos, que pueden ser simultáneamente orígenes y destinos de viajes, y 50 arcos (entre cada par de nodos existen 2 arcos,  $ij$  y  $ji$ ) cuyas longitudes  $L_a$  (en km) se muestran, entre paréntesis, en la [Figura 1a](#)). Se estudia el comportamiento de la red en un período de 4 horas correspondientes a las primeras horas de la mañana.

		Nodos destino de viajes											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nodos orígenes de viajes	1	0	10	100	230	245	100	105	15	80	20	220	155
	2	195	0	145	235	95	70	95	175	125	175	165	190
	3	170	175	0	120	10	140	150	230	85	110	25	250
	4	50	170	90	0	40	230	65	20	35	65	210	130
	5	5	180	30	95	0	25	150	90	245	125	170	220
	6	95	120	175	145	15	0	155	235	60	40	40	30
	7	110	110	195	25	180	40	0	245	195	10	120	240
	8	130	180	100	135	55	25	115	0	120	10	175	115
	9	215	220	125	155	175	150	5	195	0	35	230	60
	10	20	205	205	195	200	200	230	175	50	0	165	130
	11	135	200	225	185	80	115	165	140	165	240	0	140
	12	40	185	145	225	40	125	250	120	140	190	110	0

Tabla 1: Matriz origen-destino de viajes en hora de máxima demanda

En la [Tabla 1](#) se muestran las tasas de generación de viajes  $Q_j^d$  (veh/h) de referencia (máximas), entre nodos orígenes y destinos. Estas tasas varían temporalmente durante el período de estudio de la siguiente manera: a) en la primera hora la demanda crece desde el 10% de la demanda máxima hasta alcanzar los valores máximos, b) durante la segunda hora se mantiene constante en el máximo, c) en la tercera hora la demanda decrece hasta llegar al 20% de la demanda máxima y d) en la cuarta hora se mantiene constante en el 20%. Como función de costo en los arcos de la red se adopta la función de tiempo de viaje BPR ([Boyles et al., 2023](#)),  $t_a = l_a / v_a (1 + 0.15(\bar{g}_a / C_a)^4)$  donde, las capacidades  $C_a$  de todos los arcos se fijan en 800 veh/h y la velocidad de circulación a flujo libre  $v_a$  en 60 km/h.

El intervalo de tiempo de 4 horas que se estudia se subdivide en pasos  $\Delta t = 0.05h$ . Las iteraciones del método Physarum se fijan en 10 para cada paso de tiempo. En las Figuras 2a), 2b) y 2c) se muestra la convergencia del número de vehículos en determinados nodos hacia diferentes destinos en función de tales iteraciones para los instantes de tiempo  $t=0.5 h$ ,  $t=2 h$  y  $t=2.5 h$ , respectivamente. Como se puede apreciar la convergencia se alcanza prácticamente en 3 ó 4 iteraciones. El tiempo de cálculo para la simulación de 4 horas, es de 5 segundos aproximadamente.

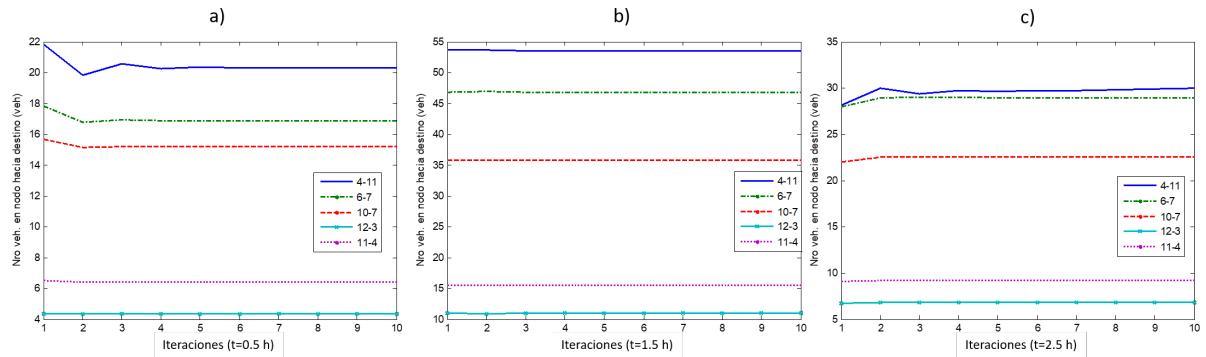


Figura 2: Convergencia del número de vehículos  $n_j^d$  en el tiempo a)  $t=0.5h$ , b)  $t=1.5h$  y c)  $t=2.5h$

En la Figura 3a) se puede observar la evolución temporal de la cantidad de vehículos asociados al nodo 4, que se dirigen hacia diferentes destinos,  $n_4^d(t)$  y en la Figura 3b) la variación temporal del número total de vehículos  $n_j(t) = \sum_d n_j^d$  para los nodos 3, 4, 7 y 8.

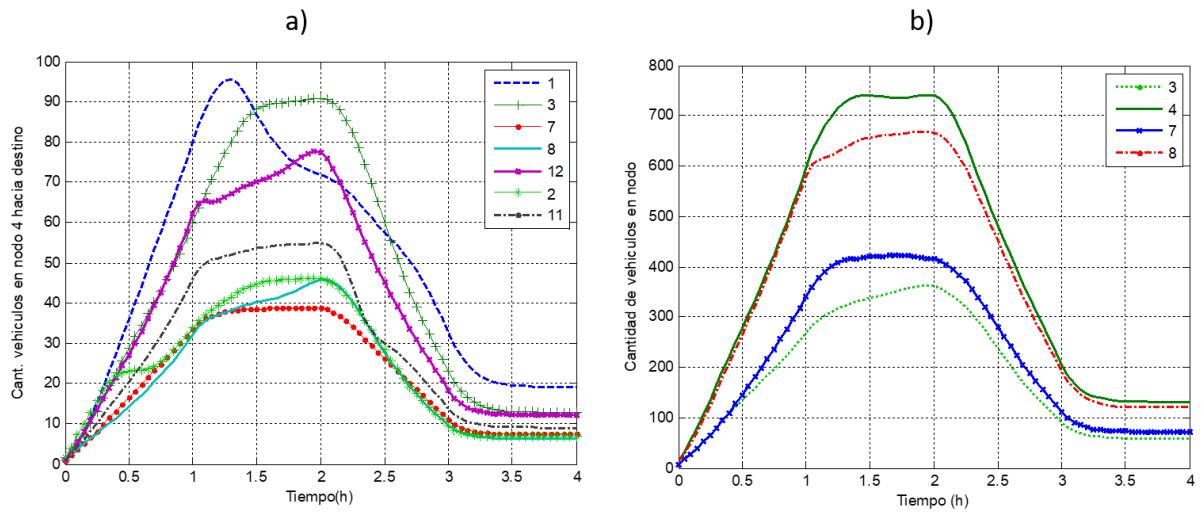


Figura 3: Evolución de la cantidad de autos, a) en el nodo 4 hacia diferentes destinos y b) totales en nodos.

De igual manera, en la Figura 4a) se muestra la evolución de los flujos vehiculares (veh/h) en los arcos  $i-j$  indicados dirigiéndose hacia el nodo 11 como destino. En la Figura 4b) se muestra el flujo total  $G_a(t) = \sum_d g_a^d$  en determinados arcos  $i-j$ .

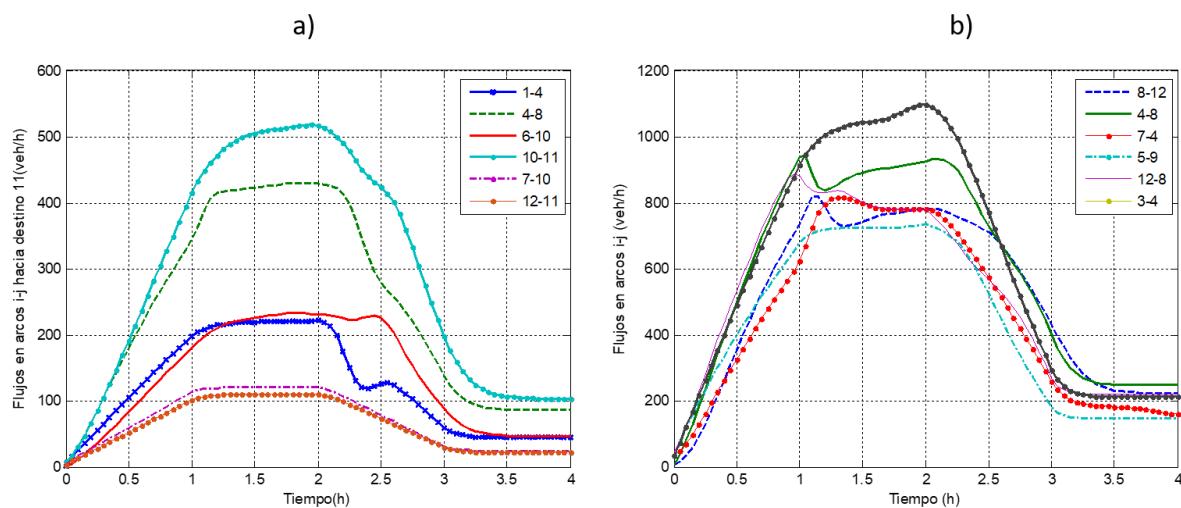


Figura 4: Evolución de los flujos, a) en los arcos  $i-j$  hacia el destino 11 y b) totales en los arcos  $i-j$ .

## CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un modelo iterativo evolutivo en el tiempo basado en el enfoque Physarum para resolver el problema de asignación dinámica de tráfico urbano basado en el criterio reactivo de elección de ruta. Los resultados de los ejemplos son auspiciosos mostrando buenas propiedades de convergencia. Actualmente se está investigando la eficiencia de la metodología en comparación con otras que se han propuesto en la literatura. Asimismo, se está trabajando en la extensión de la presente metodología a situaciones de sobrecongestión. Un aspecto interesante del enfoque propuesto es la posibilidad de paralelizar el algoritmo para analizar grandes redes.

## REFERENCIAS

- Bagloee, S.A., Sarvi, M., Patriksson, M. y Rajabifard, A., A mixed user-equilibrium and system-optimal traffic flow for connected vehicles stated as a complementarity problem, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* 32 (7), 562-580, 2017.
- Boyce, D.E., Ran, B., Leblanc, N.J. Solving and instantaneous dynamic user-optimal route choice model, *Transportation Science* 29 (2), 129-142, 1993.
- Boyles, S.D., Lownes, N.E. y Unnicrishan, A. *Transportation Network Analysis*, Vol. 1, Ver. 09, <https://sboyles.github.io/blubook.html>, 2023.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N., An anisotropic continuum model for traffic assignment in mixed transportation networks. *Applied Mathematical Modelling* 50, 585-603, 2017.
- Dominguez, P.N. y Cortínez, V.H. Un modelo evolutivo para la asignación semi dinámica de Tráfico urbano, MACI vol, X, 204-207, 2025.
- Dominguez, P.N., Peinado, M.L. y Cortínez, V.H. Diseño de redes de transporte urbano sustentable, *Mecánica Computacional* XL, 1117-1126, 2023.
- Ferris, M., Meerus, A. y Rutherford, T., Computing Wardropian equilibria complementarity framework, *Optimization Method and Software* X (5), 669-685, 1999.
- Koike, K., Nakayama, J., Yamaguchi, H. A link-based semi-dynamic user equilibrium traffic assignment model considering signal effect, *Asian Transport Studies*, Vol.8, 100062, 2022.
- Nakayama, S., Takayama, J., Nakai, J. y Nagao, K. Semi-dynamic traffic assignment model with mode and route choices under stochastic travel times, *Journal and Advanced*

- Transportation*, Vol. 46, 269-281, (2012).
- Wang, Yi, Szeto, W.Y., Hand, Ke y Friesz, Terry L., A review of the methodological advances for environmentally sustainable road transportation applications, *Transportation Research Part B: Methodological* 111, 370-394, 2018.
- Xu, S., Jiang, W., Deng, X. Y Shou, Y., A modified Physarum-inspired model for the user equilibrium traffic assignment problem, *Applied Mathematical Modelling* 55, 340-353, 2018.