Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XLII, pp. 1227-1236
A. Caggiano, G. Etse, P. Folino, M. Goldschmit, M. Pucheta, M. Storti (Eds.)
C. Pairetti, L. Ponzellini (Issue eds.)
Buenos Aires, November 11-14, 2025

LA ENSEÑANZA DE ÁLGEBRA LINEAL NUMÉRICA PARA EL DOCTORADO DE INGENIERÍA: APLICACIONES, ENFOQUES Y PERSPECTIVAS

TEACHING NUMERICAL LINEAR ALGEBRA FOR DOCTORAL ENGINEERING PROGRAMS: APPLICATIONS, APPROACHES, AND PERSPECTIVES

Luciano Ponzellini Marinelli[a,b]

[a]*Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, Av. Pellegrini 250, (S2000BTP) Rosario, Argentina, luciano@fceia.unr.edu.ar*

[b]*Facultad de Química e Ingeniería del Rosario, Pontificia Universidad Católica Argentina, Av. Pellegrini 3314, (S2002QEO) Rosario, Argentina, ponzellini@uca.edu.ar*

Palabras clave: Álgebra lineal numérica, enseñanza-aprendizaje, aprendizaje basado en problemas.

Resumen. El objetivo del trabajo es reflexionar sobre la enseñanza de la asignatura Álgebra Lineal Numérica desarrollada para el Doctorado de Ingeniería en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario. A partir de la experiencia docente de su dictado, constatamos que el curso, destinado a graduados de las distintas ingenierías, invita no sólo a enfocar la asignatura desde su aplicación, sino también a ubicarse para su enseñanza desde una perspectiva interdisciplinaria. Los contenidos, que no se tratan habitualmente en las carreras de grado, permiten vincularse con problemas profundos de la disciplina desde una perspectiva teórica y práctica haciendo énfasis en implementaciones algorítmicas. Su interés se ha intensificado con las nuevas aplicaciones (ciencia de datos, aprendizaje automatizado, inteligencia artificial), impactando en aspectos centrales del Álgebra Lineal y en la aplicación de estrategias didácticas en los ciclos básicos. Así, este trabajo se propone, a partir de la experiencia, reflexionar sobre posibles aplicaciones y la necesidad de revisar los enfoques.

Keywords: Numerical Linear Algebra, teaching-learning, problem-based learning.

Abstract. The objective of this work is to reflect on the teaching of the Numerical Linear Algebra course developed for the Doctorate in Engineering at the Faculty of Exact Sciences, Engineering, and Surveying at the National University of Rosario. Based on our teaching experience, we have found that the course, intended for graduates of various engineering programs, invites students not only to approach the subject from its application, but also to teach it from an interdisciplinary perspective. The topics, which are not usually covered in undergraduate programs, allow students to connect with profound problems in the discipline from a theoretical and practical perspective, with an emphasis on algorithmic implementations. Interest in this area has intensified with new applications (data science, artificial intelligence, machine learning), impacting on central aspects of Linear Algebra, and on the application of teaching strategies in the early stages of education. Thus, based on experience, this work aims to reflect on possible applications and the need to review approaches.

ISSN: 2591-3522 DOI: 10.70567/mc.v42.ocsid8561

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se propone reflexionar sobre la enseñanza de la asignatura Álgebra Lineal Numérica y abordar la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje-evaluación de la Matemática en la carrera de Doctorado en Ingeniería, mediante la integración de nuevas herramientas y estrategias pedagógicas. Se adopta la metodología del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) para fomentar el desarrollo de competencias técnicas, analíticas y científicas Barrows et al. (1980); Barell (2007). Esta aproximación se complementa con el uso de lenguajes de programación modernos como Matlab (2023), Octave (2024), Scilab (2023) y Python (2024). permitiendo a los estudiantes de posgrado abordar problemas reales y relevantes de sus respectivas disciplinas. La aplicación del ABP en este contexto promueve un aprendizaje activo, continuo y autónomo. Además, el enfoque interdisciplinario fomenta la conexión de la Matemática con aplicaciones prácticas, facilitando la integración de diversas áreas del conocimiento.

Este curso estuvo destinado a graduados de las distintas ramas de las ingenierías con vocación en adentrarse en los problemas del álgebra lineal numérica, también conocida como álgebra lineal aplicada. Su desarrollo, a partir del texto principal *"Numerical Linear Algebra"* Trefethen y Bau (2022) (del castellano, Álgebra Lineal Numérica, ALN), tuvo un punto de vista tanto práctico como teórico y puso énfasis en las implementaciones algorítmicas. Este es un tema que constituye un área de investigación creciente y en constante evolución desde el advenimiento de las computadoras potentes y accesibles en las distintas disciplinas. Particularmente, su interés se ha intensificado en los años recientes con la explosión de nuevas disciplinas como la Ciencia de Datos. Este tema ha impactado en aspectos profundos de lo que constituye la enseñanza del Álgebra Lineal, tanto en sus problemas centrales como en las estrategias didácticas Ponzellini Marinelli y Semitiel (2025). El curso fue destinado al interesado en investigar problemas de la física o de las ingenierías que involucre la modelización, la implementación y la aproximación numérica. Se buscó enriquecer la enseñanza de matemática avanzada en la carrera de posgrado integrando tecnología y un enfoque pedagógico innovador, que facilita el desarrollo de habilidades esenciales para la práctica científica de los futuros doctorandos.

La aplicación del ABP se vincula con el concepto de "experiencia transformadora" propuesto por Barell (2007). El doctorado, por su naturaleza, representa una etapa que redefine la trayectoria de los estudiantes debido a la dedicación y el esfuerzo que exige. En este contexto, la metodología ABP contribuye a una asignatura de posgrado, ya que facilita no solo la adquisición de créditos, sino que también promueve la exploración y el descubrimiento. Es un desafío que implica la formulación de nuevas preguntas y la búsqueda de nuevos conocimientos.

En una primera etapa se despierta la motivación y a la vez se orienta al estudiante hacia la indagación respecto a las áreas básicas de su profesión. Por tal motivo, los problemas que se presentan deben ser reales y complejos de forma que en el proceso de estudio, desde la presentación del problema hasta su solución, los doctorandos trabajen en grupos de estudio, siendo el docente una guía. En la siguiente etapa, en la medida que los doctorandos van aquiriendo conocimiento específico con la disciplina ALN, se planifica una investigación conjunta, y es en este punto donde el doctorando comienza a dirigir su propio aprendizaje, profundizando más que el docente. En la etapa final, ya la investigación termina siendo dirigida por el doctorando en forma autómona, siendo el profesor una guía.

En consecuencia, así como la implementación del ABP favorece el desarrollo de competencias y aprendizajes en el grado, esta metodología permite potenciar sus habilidades investigativas en los doctorandos, relacionándolos con el saber científico, que es parte de su formación constante en investigación.

1.1. Objetivos

Entre los objetivos del curso, se plantea el uso de esta estrategia de enseñanza-aprendizaje-evaluación en una asignatura del posgrado. Particularmente, en la asignatura “Álgebra Lineal Numérica” del Doctorado en Ingeniería de la Escuela de Posgrado y Educación Continua (EPEC) de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR):

- Adquirir conocimientos, actitudes y habilidades con base en la resolución de problemas reales y complejos usando ALN.
- Desarrollar la capacidad de aprender e implementar algoritmos de ALN en forma autónoma.
- Definir un problema del ALN e identificar el método adecuado a dicho problema.

2. PROPUESTA DIDÁCTICA

2.1. Un acercamiento al Aprendizaje Basado en Problemas

Esta propuesta es innovadora en el posgrado de la FCEIA, ya que integra el ABP con lenguajes de programación, el Análsis Funcional y el Álgebra Lineal. El objetivo es ofrecer un enfoque integral para el estudio de la matemática avanzada aplicada a la ingeniería.

Las asignaturas del area de Matemática para el Doctorado en Ingeniería de la EPEC requieren la construcción de un entorno experimental que complemente el modelo de enseñanza tradicional. Para ello, se utilizan lenguajes de programación. De acuerdo con Yan (2024), la transición del pensamiento lógico y abstracto al pensamiento de experimentación numérica mejora significativamente la capacidad práctica y la habilidad integral de los ingenieros para resolver problemas.

La educación en ALN debe entenderse en constante cambio y adecuarse al creciente desarrollo de la ciencia y tecnología. Por eso es necesario la incorporación de la asignatura a los planes de estudios de los doctorados, la actualización de los programas curriculares y la introducción de nuevas estrategias aplicadas al proceso enseñanza-aprendizaje-evaluación.

Muchas prácticas educativas y experiencias didácticas quedan reflejadas en actas de la sesión Enseñanza de los Métodos Numéricos del Congreso Argentino de Mecánica Computacional (MECOM), cuyo objeto es generar un espacio de discusión sobre la disciplina en carreras de grado y posgrado. En trabajos anteriores, se exploró sobre la enseñanza de ALN (Severin y Ponzellini Marinelli, 2013; Ponzellini Marinelli, 2023). Este trabajo pretende, a partir de reflexionar sobre la experiencia educativa en el área, incorporar una práctica de enseñanza en los estudios de posgrado.

El proceso enseñanza-aprendizaje-evaluación planteado por la ABP es diferente, al propuesto por la didáctica tradicional centrado en las clases magistrales, focalizando el proceso de enseñanza en el estudiante. Desde la metodología ABP, se elaboran preguntas relacionadas con contenidos que puedan aplicarse y traducirse a casos concretos, y se contemplan una serie de actividades basadas en la resolución de problemas vinculados a esas preguntas. Esto convierte los contenidos en un saber situado y abre un proceso de investigación por parte de los doctorandos dotado de sentido para ellos. Se acompaña y guía el conocimiento, pero también se promueve que trabajen con autonomía, compromiso y cooperación, apuntando a la elaboración de un producto final para ser compartido. Esta metodología permite a los estudiantes un acercamiento al diseño curricular con sentido y significado.

Tanto en el grado, como en el posgrado, la evaluación también debe resignificarse. Al trabajar con esta metodología, promovemos formas de evaluar que sean colaborativas y situadas, con tareas que impliquen desafíos cognitivos para los estudiantes, y que estos puedan organizar y supervisar su propio aprendizaje.

2.2. Ideas centrales de nuestra metodología

Entre los objetivos del curso se destacan:

- Reforzar conocimientos generales sobre Álgebra Lineal.
- Adquirir conocimientos específicos en el estudio del ALN.
- Aprender habilidades para utilizar estas técnicas implementando algoritmos en lenguajes.
- Desarrollar capacidades de modo de resolver problemas numéricos que provengan de modelos reales y complejos.

2.3. Contenidos

La asignatura contiene las siguientes unidades temáticas:

- Fundamentos. Descomposición en valores singulares. Multiplicación matriz-vector. Matrices y vectores ortogonales. Normas. Descomposición en valores singulares (DVS).
- Proyectores. Factorización QR. Ortogonalizacion de Gram-Schmidt. Triangulación de Householder. Problemas de mínimos cuadrados.
- Condicionamiento y estabilidad. Numero de condición. Aritmética de punto flotante. Estabilidad. Estabilidad de la triangulación de Householder. Estabilidad de la sustitución regresiva. Condicionamiento y estabilidad de algoritmos de mínimos cuadrados.
- Eliminación gaussiana. Factorización LU. Pivoteo. Estabilidad de la eliminación gaussiana. Factorización de Cholesky.
- Problemas de autovalores. Algoritmos para el calculo de autovalores. Reducción a la forma de Hessenberg o tridiagonal. Cociente de Rayleigh.Iteración inversa. Algoritmo QR sin corrimientos. Algoritmo QR con corrimientos. Cálculo de la DVS.
- Repaso de métodos iterativos. Subespacios de Krylov. Iteración de Arnoldi. GMRES. La iteración de Lanczos. Cuadratura gaussiana. Gradientes conjugados. Métodos de biortogonalización. Precondicionamiento.

2.4. El enfoque de la asignatura

El curso se compone de clases teórico-prácticas semanales orientadas por el cuerpo docente. Estas sesiones se enfocan en la exposición de las ideas centrales de las lecturas y en la integración de herramientas conceptuales. Además, se resuelven problemas de ALN con el apoyo de computadoras personales, utilizando diversos lenguajes de programación. Los doctorandos realizan entregas periódicas de tareas y actividades, enfocadas principalmente en experiencias computacionales diseñadas para desarrollar habilidades específicas en el área. Basándose en un caso de aplicación relevante para la disciplina del doctorando, en la cual se aplican técnicas numéricas estudiadas en el curso o derivadas del mismo, se realiza de un proyecto integrador de aplicación. Este trabajo consta de la realización de un informe escrito y de una exposición oral ante el cuerpo docente, junto al resto de los estudiantes del doctorado.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Entre estos trabajos realizados se obtuvieron los siguientes proyectos:

- *Doctorando en Ingeniería: Ing. Eca. Bortolotto, Mario L. (CIFASIS-CONICET-UNR).*

  "Los métodos iterativos de Arnoldi y Lanczos. Características de los problemas de estabilidad de señales pequeñas en sistemas de redes eléctricas", Scilab (2023).

  El análisis matricial utilizando ALN es una herramienta poderosa para estudiar y resolver problemas complejos en sistemas de potencia, particularmente aquellos que involucran estabilidad armónica en sistemas de energía basados en electrónica de potencia. El documento *"Modeling and Analysis of Harmonic Stability in an AC Power-Electronics-Based Power System"*, de Doe y Smith (2022), emplea diversas técnicas y conceptos para abordar estos problemas en areas como:

  - Matrices de admitancia y de impedancia.
  - Descomposición y modelado de componentes.
  - Modelado de control en bucles cerrados.
  - Análisis de estabilidad armónica.

  Este trabajo proporciona un ejemplo específico de aplicacón de técnicas numéricas a la derivación de la matriz de admitancia (Y_{nc}) utilizadas para describir cómo las corrientes en cada nodo están influenciadas por las tensiones en otros nodos del sistema; y también para invertir matriz de admitancia ($Z_{nc} = Y_{nc}^{-1}$), llamadas matrices de impedancia, utilizadas para analizar cómo las tensiones responden a las corrientes inyectadas en el sistema.

  El problema fue motivado por el trabajo Kundur y Malik (2022) sobre grandes sistemas de energía, donde los problemas de estabilidad de señales pequeñas pueden ser locales o globales. Los problemas locales afectan a una pequeña parte del sistema y pueden estar asociados con oscilaciones del ángulo del rotor de un solo generador o de una sola planta frente al resto del sistema eléctrico que se denominan oscilaciones en modo de planta local. El análisis de problemas locales de estabilidad de señales pequeñas requiere una representación detallada de una pequeña porción del sistema eléctrico interconectado completo. El resto de la representación del sistema puede simplificarse adecuadamente mediante el uso de modelos simples y equivalentes del sistema. Normalmente, el sistema completo puede representarse adecuadamente mediante un modelo que tenga como máximo varios cientos de estados.

  En este proyecto el estudiante trabaja con el método de Arnoldi y de Lanczos presentado en Trefethen y Bau (2022). El primero es un método que encuentra autovalores de matrices no hermitianas ($A \neq A^*$) y que tiene conexiones con teoría de aproximación de polinomios que si bien no encuentra directamente los autovalores de A, proporciona una aproximación de los autovalores a través de una iteración que genera una secuencia de matrices más pequeñas, llamadas matrices tridiagonales de Hessenberg (H_n), que son ortogonalmente similares a la matriz original. Este proceso comienza con un vector inicial y utiliza iteraciones para construir una base ortogonal del subespacio de Krylov generado por la matriz original. Este subespacio contiene información sobre los autovalores y las iteraciones de Arnoldi van generando una secuencia de vectores que son ortogonalmente similares a los autovectores y autovalores de la matriz original A. Los autovalores se pueden encontrar utilizando métodos estándar para matrices tridiagonales, como el método QR. La iteración de Lanczos (Algoritmo 36.1, Trefethen y Bau (2022)) es la iteración de Arnoldi especializada para el caso de una matriz hermitiana, en particular supondremos la matriz es real ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$) y simétrico ($A = A^T$):

$$AQ_n = Q_{n+1}T_n, \quad T_n = Q_n^T AQ_n, \quad \textit{iteración de Lanczos}.$$

Como resultados obtenidos, el análisis matricial basado en ALN fue esencial para modelar y analizar la estabilidad armónica en sistemas de energía complejos, evaluar la interacción eficiente entre diferentes componentes del sistema y su impacto en la estabilidad global. Se aplicaron estos métodos iterativos para aproximar los autovalores, evitando el cálculo de la inversa de la matriz de impedancia equivalente. Se pudo constatar numéricamente que la convergencia de los autovalores es monótona, es decir, el mayor autovalor crece y el menor decrece con cada iteración, siendo que el método garantiza que los autovalores aproximados convergen hacia los autovalores reales de la matriz A. Finalmente, aspectos teóricos, como el teorema de Cauchy de autovalores entrelazados, asegura que los autovalores de las matrices de subespacios entrelazan a los autovalores de A.

- *Doctorando en Ingeniería: Ing. Mec. Rabazzi, Santiago (IFIR-CONICET-UNR).*

  "Algorimos QR para cálculo de autovalores y autovectores. Análisis estructural de modos y frecuencias", Python (2024), Code Aster (2018).

  En análisis dinámico estructural, como el cálculo de frecuencias naturales y modos de vibración, el algoritmo QR es clave para resolver el problema de autovalores y autovectores. En aplicaciones de ingeniería, el interés suele centrarse en las frecuencias naturales más bajas dentro del espectro completo. Estas frecuencias se calculan a partir de los autovalores que suelen ordenarse en orden decreciente (o por magnitud en módulo) para identificar los modos más relevantes, es decir, aquellos con frecuencias más bajas. Esto es clave porque las frecuencias bajas son críticas en diseño estructural, ya que pueden provocar resonancias peligrosas.

  Los modos de vibración asociados describen cómo la estructura se deformará bajo excitación. Los algoritmos iterativos, como el QR, permiten obtener con precisión el espectro completo de frecuencias del sistema. Sin embargo, un aspecto clave para optimizar los tiempos de cálculo es el orden en que se obtienen los autovalores. La factorización QR devuelve los autovalores en orden decreciente. Además, en la implementación del algoritmo, la matriz A se reduce progresivamente a medida que los elementos en la subdiagonal convergen. Aprovechando estas propiedades, es posible establecer una condición de parada en el algoritmo, deteniendo la factorización cuando se haya alcanzado el número deseado de autovalores. De este modo, se evita el cálculo innecesario sobre toda la matriz, logrando una reducción significativa en el tiempo de procesamiento y en el uso de recursos computacionales.

  Este proyecto se centra en la factorización QR como una técnica que descompone una matriz en el producto de dos matrices donde una es ortogonal y la otra triangular superior Trefethen y Bau (2022):

$$A^k = Q^{(k)}R^{(k)}, \quad A^{(k)} = \left(Q^{(k)}\right)^T AQ^{(k)}, \quad \textit{algoritmo QR}.$$

La factorización QR se utiliza ampliamente en algoritmos numéricos, como resolución de sistemas de ecuaciones lineales, problemas de mínimos cuadrados y cálculo de autovalores. Para realizar la factorización QR puede usarse:

- El proceso de Gram-Schmidt: construye la matriz ortogonal ortogonalizando las columnas de la matriz original.
- Las reflexiones de Householder: utiliza reflexiones para anular componentes de las columnas de la matriz ortogonal, siendo más estable y eficiente numéricamente.
- Las rotaciones de Givens: emplean rotaciones para hacer ceros específicos en la matriz funcionando de manera eficiente para matrices dispersas.

Se empleó el algoritmo QR en un caso de aplicación de análisis modal, donde se extrajeron las matrices de masa y rigidez ensambladas del problema del Método de Elementos Finitos (MEF), ver Vázquez (2001), y se preprocesaron para obtener la matriz input para los algoritmos QR programados en lenguaje Python. Se define la malla en el MEF para un elemento de viga discretizado en partes de igual longitud y se definen los grupos de elementos (nodos y segmentos) y se les asigna un nombre. Luego, en el código Code-Aster, se procede a generar un estudio en forma grafica mostrándose la secuencia del caso. Luego, se procede a la generación y ensamble de las matrices de masa y rigidez, aprovechando los comandos del código. La secuencia comandos es posteriormente corrida dentro del software Code-Aster para obtener las matrices deseadas. El código continúa con el cálculo de los modos a fin de extraer resultados de comparación y se preprocesan, con un script propio, los resultados de las matrices extraídas de **?**.

- *Lic. en Matemática: Rosano, Valentina (FCEIA-UNR).*

  "Método de Gradientes Conjugados. Aplicación a un problema de Dinámica de Fluidos Computacional", Octave (2024).

  El problema de aplicación consiste en estudiar aspectos del ALN en la Dinámica de Fluidos Computacional (del inglés, Computational Fluid Dynamics, CFD) en un colector solar propuesto en Catalano y Cortizo Carbone (2024). Este es un dispositivo que capta la energía en forma de radiación proveniente del Sol, la convierte en calor y le transfiere este calor a un fluido (generalmente agua, aire o aceite) que circula por dentro del colector. Este problema es estudiado, modelado y resuelto numéricamente utilizando el Método de Volúmenes Finitos (MVF), ver Greenshields y Weller (2022). Este es un método de discretización adecuado para la simulación numérica de diversos tipos de ecuaciones diferenciales parciales (elípticas, parabólicas o hiperbólicas) donde intervienen leyes de conservación.

  Mediante inspección de la implementación en lenguaje Octave del MVF, las matrices obtenidas al discretizar la ecuación diferencial parcial, se verifica que estas son simétricas y definidas positivas, por lo cual el método directo utilizado por defecto es el método de Cholesky. Al ser este un método más costoso ($O(n^3)$), la información sobre la matriz afirma la utilización de un método iterativo ($O(n^2)$) es adecuada para lo cual se estudia el patrón de esparcidad de las matrices generadas, observándose que tienen estructura de banda y del tipo rala.

  En este proyecto se estudia el método iterativo de Gradientes Conjugados (GC), descubierto por Hestenes y Stiefel (1952) que resuelve sistemas de ecuaciones simétricos definidos positivos de manera eficiente si los autovalores están bien distribuidos. Siendo la matriz del sistema A definida positiva, puede definirse la A-norma de un vector $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_A = \sqrt{x^T A x}.$$

El método de CG puede descrirse como un sistema de fórmulas recurrentes que generan una única sucesión de iteraciones con la propiedad de que en el paso n, $||e_n||_A$ es mínima.

Se estudiaron dos casos particulares con diferentes condiciones de borde, una con condiciones de borde continuas y otra con condiciones de borde discontinuas. Con ambas condiciones de borde, la matriz asociada al sistema es simétrica y definida positiva por lo tanto el uso de CG es apropiado. Además, se pudo comprobar en ambos casos que este método tiene una mejor eficiencia (a veces a costa de sacrificar algunos órdenes de tolerancia) en comparación con el de Cholesky. Particularmente esta mejora de la eficiencia de tiempo computacional se obtiene para matrices grandes y ralas que son los casos de interés en estas aplicaciones.

- *Doctorando en Ingeniería: Lic. Fís. Armoa, Martín (IFIR-CONICET-UNR).*

  "Métodos iterativos de biortogonalización. Aplicación del método JFNK en un esquema de Newton-Raphson para la ecuación de convección-difusión", Octave (2024).

  Los modelos físicos representados por ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) no lineales pueden transformarse, tras ser discretizados, en grandes sistemas de ecuaciones no lineales (SENL) que pueden resolverse usando el método de Newton-Raphson para SENLs el cual requiere de la resolución numérica de sistemas lineales algebraicos.

  En este proyecto se analizan algunos de estos métodos, haciendo comparativas de resultados y a una aplicación específica en el campo de EDPs, al problema de convección-difusión aproximada por el método de diferencias finitas y resuelta por el método de Newton-Raphson libre de jacobiano conocido como Método de Newton-Krylov para Ecuaciones No Lineales Kelley (2003). Se estudia la aplicación del Método de Newton-Inexacto Libre de Jacobiano (JFNK) a la ecuación semilineal de convección-difusión muestra la capacidad de estos algoritmos para abordar problemas reales de ingeniería. La discretización de la EDP genera un sistema no lineal grande, cuya matriz Jacobiana asociada sería extremadamente costosa de formar y factorizar directamente. El JFNK elude esta dificultad al aproximar el producto Jacobiano-vector mediante diferencias finitas, permitiendo así que los métodos de Krylov actúen como solvers eficientes para los sistemas lineales internos de Newton, sin la necesidad de construir explícitamente la Jacobiana.

  Los métodos de biortogonalización Trefethen y Bau (2022) son una clase de algoritmos diseñados para resolver sistemas lineales de gran escala que involucran matrices no simétricas e indefinidas que surgen en diversas aplicaciones, como la dinámica de fluidos y la mecánica de materiales, donde las matrices no son simétricas debido a la naturaleza de los modelos físicos subyacentes. Mientras que los métodos tradicionales se aprovechan de la simetría de la matriz para garantizar una convergencia eficiente, las matrices no simétricas requieren un enfoque distinto. Para ello, se introducen dos conjuntos de vectores que son biortogonales entre sí, es decir, cada vector de un conjunto es ortogonal a los vectores correspondientes del otro conjunto con respecto a un producto interno definido.

Uno de los métodos pioneros en este campo es el algoritmo Bi-Lanczos, desarrollado por C. Paige y M. Saunders a mediados de la década de 1970, ver Fletcher (1976); Lanczos (1952). El Bi-Lanczos extiende el algoritmo de Lanczos original para matrices simétricas a matrices generales no simétricas, permitiendo la generación de pares de bases biortogonales en los espacios de Krylov asociados con la matriz y su transpuesta. La derivación de estos métodos implica la construcción de secuencias de vectores en los espacios de Krylov generados por la matriz y su transpuesta. A través de procesos de biortogonalización, se garantiza que los vectores generados satisfacen propiedades de ortogonalidad mutua, fundamental para la convergencia del método:

$$AV_n = V_{n+1}T_n, \quad AW_n = W_{n+1}S_n, \quad T_n = S_n^* = W_n^* AV_n.$$

Los resultados numéricos obtenidos se mostraron para la reconstrucción de la solución numérica, para la convergencia del Residuo y para la comparación de tiempos de ejecución para los métodos iterativos de tipo Krylov: GMRES (Generalized Minimal Residual), CGS (Conjugate Gradient Squared), BiCGSTAB (BiCG Stabilized), QMR (Quasi-Minimal Residual) y TFQMR (Transpose-Free QMR). Se presentaron resultados para grandes mallas de 90601 incógnitas mostrándose la convergenciac del residuo y estabilidad de los mismos. A su vez, se realiza la reconstrucción de la solución numérica y una comparación de tiempos de ejecución.

Estos proyectos tuvieron entre sus objetivos la aplicación de métodos numéricos para la obtención de soluciones aproximadas a problemas de aplicación reales y complejos a los que los doctorandos se enfrentan como futuros investigadores en formación. Algunos de estos trabajos tuvieron continuidad y se publicaron en actas de congresos. Ver Rosano et al. (2024, 2025).

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se plantea el uso de una estrategia de enseñanza-aprendizaje-evaluación en la asignatura “Álgebra Lineal Numérica” para el Doctorado en Ingeniería perteneciente la Escuela de Posgrado y Formación Continua de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, de la Universidad Nacional de Rosario.

La propuesta de una guía de Aprendizaje Basado en Problemas como una estrategia educativa, permitió desarrollar a los doctorandos ciertas metodologías y habilidades prácticas para enfrentarse a una situación con un reto como fuente de inspiración y motivación para su aprendizaje, contribuyendo a elaborarse nuevas preguntas y profundizando en problemas propuestos por sus mismas disciplinas.

En este proceso, el docente fue una guía y soporte, orientando al doctorando a descubrir y hacer suyo el problema de estudio y su resolución. Durante el proceso el docente estuvo presente acompañando y guiando, involucrandose en los problemas seleccionados para comprender cómo orientar a su posible resolución.

Los proyectos desarrollados en problemas de estabilidad de señales pequeñas en sistemas de redes eléctricas, en análisis estructural de modos y frecuencias, en dinámica de fluidos computacional y en la ecuación de convección-difusión, muestran que el Aprendizaje Basado en Problemas en esta instancia surgió como posibilidad para la enseñanza y el aprendizaje en una carrera de posgrado.

Dado su motivación, algunos de los proyectos tuvieron continuidad y fueron expuestos en congresos científicos en distintos formatos, generando nuevos conocimientos y abriendo nuevos desafíos de investigación.

REFERENCIAS

Barell J. *El aprendizaje basado en problemas. Un enfoque investigativo*. Manantial, Buenos Aires, 2007.

Barrows H., Robyn M., y Tamblyn M. *Problem-Based Learning: An Approach to Medical Education*. Springer Publishing Company, New York, NY, USA, 1980.

Catalano J. y Cortizo Carbone M. *Evaluación de colectores solares empleando herramientas de dinámica de fluidos computacional*. Proyecto Final Ing. Mecánica, FCEIA, UNR, 2024.

Code Aster. *Code Aster version 14.2*. General Public License, https://code-aster.org/, 2018.

Doe J. y Smith J. Modeling and analysis of harmonic stability in an ac power-electronics-based power system. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20:1234–1245, 2022.

Fletcher R. Conjugate gradient methods for indefinite systems. *Numerical Analysis Dundee 1975, Lecture Notes in Mathematics*, 506:73–89, 1976.

Greenshields C. y Weller H. *Notes on Computational Fluid Dynamics: General Principles*. CFD Direct Ltd, Reading, UK, 2022.

Hestenes M. y Stiefel E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Iournal of Research of the National Bureau of Standards*, 49:409–436, 1952.

Kelley C.T. *Solving Nonlinear Equations with Newton's Method*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA, 2003.

Kundur P. y Malik O. *Power system stability and control*. McGraw-Hill, New York, 2022.

Lanczos C. Solution of systems of linear equations by minimized iterations. *Iournal of Research of the National Bureau of Standards*, 49:33–53, 1952.

Matlab. *MATLAB version 7.10.0 (R2010a)*. The MathWorks Inc., 2023.

Octave. *GNU Octave version 8.3.0*. GNU General Public License, www.octave.org/, 2024.

Ponzellini Marinelli L. Nuevas estrategias de enseñanza-aprendizaje en la asignatura Métodos Numéricos de la Facultad de Química e Ingeniería del Rosario, Pontificia Universidad Católica Argentina. *XXXIX Congreso Argentino de Mecánica Computacional (MECOM)*, 2023.

Ponzellini Marinelli L. y Semitiel J. Taller de álgebra Lineal en Scilab: una experiencia de innovación didáctica en las carreras de Ingeniería. *XIX Jornadas de Ciencia y Tecnología 2025, UNR, 23-24 Octubre 2025*, 2025.

Python. *Python version 3.13*. Python Software Foundation License, www.python.org/, 2024.

Rosano V., Ponzellini Marinelli L., y Pairetti C. Gradientes conjugados en un problema de dinámica de fluidos computacional aplicado a colectores solares (póster). *Actas XL Congreso MECOM*, 1:13–13, 2024.

Rosano V., Ponzellini Marinelli L., y Pairetti C. Estudio de convergencia de métodos iterativos en un problema de mecánica de fluidos computacional aplicado a colectores solares. *X Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 10:220–223, 2025.

Scilab. *Scilab version 2023.1.0*. Scilab Enterprises, www.scilab.org/, 2023.

Severin D. y Ponzellini Marinelli L. Un caso de aplicación de métodos numéricos mediante el uso de splines como motivación para la enseñanza y aprendizaje en Ingeniería. *LXI Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina, XXXVI Reunión de Educación Matemática*, 2013.

Trefethen L.N. y Bau D.I. *Numerical Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, PA, USA, 2022.

Vázquez M. *El Método de los Elementos Finitos Aplicado al Análisis Estructural*. Noela, Madrid, 2001.

Yan J. An empirical study on improving mathematics application skills of engineering students using MATLAB tools. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 9(1), 2024.