

ESTUDIO COMPARATIVO DE ESTRATEGIAS DE BACKTRACKING PARA MODELOS VARIACIONALES TIPO PHASE-FIELD DE FRACTURA CUASI-FRAGIL

**A COMPARATIVE STUDY OF BACKTRACKING STRATEGIES FOR
VARIATIONAL PHASE-FIELD QUASI-BRITTLE FRACTURE MODELS**

Mariela Luege^a, Agustina Campra^a y Antonio Orlando^b

^a*CONICET, Instituto de Estructuras 'Ing. Arturo M. Guzmán', Universidad Nacional de Tucumán,
{mluege,acampra}@herrera.unt.edu.ar*

^b*CONICET, Departamento de Bioingeniería, FACET, Universidad Nacional de Tucumán,
aorlando@herrera.unt.edu.ar*

Palabras clave: Modelo variacional de fractura; Modelo de daño de tipo gradiente; Cotas energéticas; Backtracking.

Resumen. En este artículo se comparan dos estrategias de backtracking diseñadas para mejorar la calidad de las soluciones numéricas de un modelo variacional de tipo phase-field para fractura cuasi-frágil. La primera estrategia corresponde al método clásico de reinicialización propuesto por Bourdin (2007), cuya eficacia ha sido validada en diversos escenarios, y que asume la aplicación exclusiva de condiciones de contorno de tipo Dirichlet con variación monótona. La segunda estrategia relaja esta hipótesis y se basa en propiedades del punto de mínimo global, expresadas mediante dos cotas energéticas. A partir de un problema de referencia, se comparan ambas estrategias. Dado que no es posible determinar a priori cuál de ellas ofrece mejores resultados en general, se propone un algoritmo híbrido que combina ambas de manera adaptativa, con el objetivo de aprovechar las ventajas de cada una según las características del problema considerado.

Keywords: Variational model of fracture; Gradient–damege model; Energetic bounds; Backtracking.

Abstract. This article compares two backtracking strategies designed to improve the quality of numerical solutions of a variational phase-field model for quasi-brittle fracture. The first strategy corresponds to the classical reinitialization method proposed by Bourdin (2007), whose effectiveness has been validated in various scenarios, and which assumes the exclusive application of Dirichlet-type boundary conditions with monotonic variation. The second strategy relaxes this assumption and is based on properties of the global minimizer, expressed in the form of two energy bounds. Based on a benchmark problem, both strategies are compared. Since it is not possible to determine a priori which of them generally provides better results, a hybrid algorithm is proposed that adaptively combines both strategies, aiming to leverage the advantages of each depending on the characteristics of the problem under consideration.

1. INTRODUCCIÓN

La simulación numérica de la fractura en materiales quasi-frágiles, tales como cerámicas, placas de mármol o estructuras de hormigón, representa un desafío central en la mecánica computacional. Bajo condiciones isotérmicas y cargas mecánicas, estos materiales desarrollan mecanismos de daño que requieren modelos capaces de capturar la nucleación, propagación y coalescencia de grietas de forma precisa y eficiente. Una de las aproximaciones más robustas para modelar este fenómeno es la formulación variacional de la fractura propuesta por [Francfort y Marigo \(1998\)](#); [Bourdin et al. \(2008\)](#), la cual reinterpreta el criterio de Griffith como una condición de optimalidad basada en la minimización global de la energía total del sistema. Esta energía se define como la suma de la energía elástica almacenada en el cuerpo y la energía disipada en la generación de nuevas superficies de fractura.

Dicho enfoque se enmarca en la teoría de los problemas de discontinuidades libres, cuyo tratamiento formal requiere el uso del espacio funcional de funciones SBV (Special functions of Bounded Variation) ([Ambrosio et al., 2000](#)). Sin embargo, el tratamiento numérico directo de funciones SBV es impracticable en la práctica. Un resultado clave en este contexto es que los quasi-mínimos globales de versiones regularizadas de estos funcionales convergen, en un sentido preciso, al mínimo global del funcional con discontinuidades libres. Esta regularización permite formular el problema en espacios de Sobolev, que son compatibles con métodos de elementos finitos.

A pesar del sólido marco teórico que respalda la formulación variacional y sus versiones regularizadas, la obtención numérica de soluciones que correspondan a puntos de quasi-mínimo global sigue siendo un reto no resuelto. En la práctica, los algoritmos existentes ([Miehe et al., 2010](#); [Wu et al., 2020](#)) suelen centrarse en resolver las condiciones de primer orden de optimalidad o las condiciones de Kuhn-Tucker. No obstante, debido a la no convexidad del problema, estas condiciones son necesarias pero no suficientes para garantizar que la solución obtenida corresponde a un mínimo global. Como resultado, la validación de las soluciones numéricas se basa comúnmente en inspecciones visuales o comparaciones cualitativas con resultados experimentales, careciendo de un criterio riguroso que asegure la consistencia con el principio variacional que motiva el modelo.

En este trabajo se aborda esta limitación proponiendo una estrategia computacional que mejora la confiabilidad de los esquemas de minimización alternada basados en el método de Newton, sin recurrir a técnicas de optimización global, las cuales resultan computacionalmente prohibidas debido a la alta dimensionalidad del problema. Se considera una familia de funcionales regularizados que son separadamente convexos con respecto al desplazamiento \mathbf{u} y al campo de daño tipo phase-field β , el cual varía en el intervalo $[0, 1]$. A partir de esta formulación, se deriva una desigualdad energética con cotas superior e inferior, la cual se satisface únicamente en puntos de mínimo global. Esta desigualdad se introduce como un criterio adicional de optimalidad dentro de un algoritmo de backtracking, aumentando la robustez y precisión de la solución.

Asimismo, se compara esta estrategia con el enfoque clásico de backtracking propuesto en [Bourdin \(2007\)](#), el cual asume solo condiciones al contorno de tipo Dirichlet con variación de tipo monótona. Dado que ninguna de las dos estrategias es universalmente superior, lo que motiva el desarrollo de un algoritmo híbrido que combina ambas de forma adaptativa, seleccionando la más adecuada según el régimen de carga del problema.

Finalmente, se presenta un ejemplo numérico que ilustra la implementación y el desempeño del algoritmo propuesto. Los resultados muestran una buena concordancia entre los patrones

de fisura simulados y las observaciones experimentales, validando la efectividad y solidez del enfoque desarrollado.

2. FORMULACIÓN VARIACIONAL REGULARIZADA

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto, acotado y simplemente conexo con $m = 1, 2, 3$ y contorno $\partial\Omega$ de tipo Lipschitz. Este dominio representa la configuración de referencia de un cuerpo elástico-lineal libre de fisuras. Consideremos $\mathcal{P} = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T\}$, una partición del intervalo de tiempo $[0, T]$. Denotamos por $\Gamma_n \subset \Omega$ el patrón de fisuras en el instante t_n . Se asume que este patrón es un conjunto rectificable de Ω de dimensión $m - 1$ ([Ambrosio et al., 2000](#)). Además, Γ_n se identifica con la unión de los conjuntos de discontinuidades de tipo salto de los desplazamientos \mathbf{u}_i ($0 \leq i \leq n$), es decir, $\Gamma_n = \bigcup_{i=0}^n \Gamma_i$, donde Γ_i es el conjunto de las discontinuidades de tipo salto de \mathbf{u}_i .

La formulación variacional del proceso mecánico de propagación y formación de fracturas producido por las condiciones de contorno de Dirichlet y de Neumann y las cargas externas aplicadas al tiempo t_{n+1} asume que $(\mathbf{u}_{n+1}, \Gamma_{n+1})$, la deformación \mathbf{u} y el patrón de fisuras Γ al tiempo t_{n+1} , respectivamente, sea un punto de mínimo global del siguiente funcional de energía ([Francfort y Marigo, 1998; Bourdin et al., 2008](#)):

$$\mathcal{F}(t_{n+1}, \mathbf{u}, \Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\mathbf{x} - \langle \mathcal{L}(t_{n+1}), \mathbf{u} \rangle + g_c \mathcal{H}^{m-1}(\Gamma), \quad (1)$$

sujeto a la condición de irreversibilidad $\Gamma_n \subseteq \Gamma$, con \mathbf{u} que verifica las condiciones al contorno de Dirichlet sobre $\partial\Omega_D$ y Γ coincidente con el conjunto de discontinuidades de \mathbf{u} . En (1), el término $\langle \mathcal{L}(t_{n+1}), \mathbf{u} \rangle$ representa el trabajo realizado por las cargas externas y las condiciones de contorno de Neumann. Aquí, $\boldsymbol{\varepsilon}$ denota la parte simétrica del gradiente de deformación $\nabla \mathbf{u}$, mientras que $\mathcal{H}^{m-1}(\Gamma)$ es la medida de Hausdorff de dimensión $m - 1$ del conjunto rectificable Γ . El término $g_c \mathcal{H}^{m-1}(\Gamma)$ representa la energía superficial de fractura, y ψ es la densidad de energía elástica libre.

Sea $\{\beta_\ell(\cdot, t_n)\}_{\ell>0}$ una familia de funciones definidas en Ω , con valores en el intervalo $[0, 1]$, tales que $\lim_{\ell \rightarrow 0} \beta_\ell(\mathbf{x}, t_n) = \chi_{\Gamma_n}(\mathbf{x})$, donde χ_X es la función característica del conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^m$. A continuación, cuando no hay posibilidad de equivocación, se omitirá la dependencia de ℓ para simplificar la notación; por ejemplo, un término de esta familia será indicado como β_n , entendiendo que la formulación es válida para cada $\ell > 0$ fijo.

Se considera entonces la siguiente familia de funcionales regularizados, parametrizados por $\ell > 0$, con \mathbf{u} y β pertenecientes a subespacios afines de los espacios de Sobolev estándar:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\ell(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta) = & \underbrace{\int_{\Omega} [R(\beta) \psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon})] \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{g_c \ell}{c} |\nabla \beta|^2 \, d\mathbf{x} - \langle \mathcal{L}(t_{n+1}), \mathbf{u} \rangle}_{\tilde{\mathcal{E}}(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta)} \\ & + \underbrace{\int_{\Omega} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{g_c}{c \ell} \frac{d\mu}{d\beta} \dot{\beta} \, dt \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} I_{\mathbb{R}^+}(\beta - \beta_n) \, d\mathbf{x}}_{\mathcal{D}(\beta, \beta_n)}. \end{aligned} \quad (2)$$

En (2), ψ_0^+ y ψ_0^- tienen las siguientes expresiones

$$\psi_0^\pm = \frac{\lambda}{2} (\text{tr}[\boldsymbol{\varepsilon}^\pm])^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon}^\pm : \boldsymbol{\varepsilon}^\pm$$

y representan las densidades de energía elástica libre expresadas en términos de los componentes de deformación ε^+ y ε^- , obtenidas mediante la descomposición espectral de la deformación total ε , como en (Miehe et al., 2010; Amor et al., 2009; Luege y Orlando, 2021). Esta descomposición asocia el daño únicamente a las regiones en tracción. Los parámetros λ y μ son las constantes de Lamé mientras el término $I_{\mathbb{R}^+}(x)$ es la función indicadora del conjunto \mathbb{R}^+ , y garantiza la condición de irreversibilidad $\beta \geq \beta_n$. La función $R(\beta)$ es la *función de degradación de daño*, que describe la pérdida progresiva de rigidez del material debido al daño. Es una función monótonamente decreciente, con $R(0) = 1$ (material intacto) y $R(1) = 0$ (material completamente dañado). Por su parte, la función $\mu = \mu(\beta)$, denominada *función geométrica de la fractura*, controla la forma y distribución de la densidad de energía asociada a la fisura regularizada, y se utiliza para definir el pseudopotencial de dissipación $\phi(\beta, \dot{\beta}) = \frac{d\mu}{dt}$ de manera que sea una función gauge como función de $\dot{\beta}$. La constante c es un factor de escala introducido en Wu (2017), que depende de la elección específica de $\mu(\beta)$ y se define como:

$$c = \int_0^1 \sqrt{\mu(\beta)} d\beta.$$

En (Wu, 2017; Lorentz y Godard, 2011) se demuestra que, con esta expresión de c y apropiada elección de $R(\beta)$, la energía de fractura regularizada converge hacia la energía de fractura de Griffith. En la Tabla 1 se reportan las expresiones de $R(\beta)$, $\mu(\beta)$ y c para los principales modelos de daño regularizado propuestos en la literatura, junto con sus respectivos acrónimos. En la expresión de $R(\beta)$ para el modelo de zona cohesiva (CZM) propuesto en Wu (2017), el parámetro de ablandamiento $\rho > 0$ controla el ancho de la banda de daño, y en Lorentz y Godard (2011) se propone un rango de valores adecuados para dicho parámetro.

Nombre del modelo	$R(\beta)$	$\mu(\beta)$	c
AT1	$(1 - \beta)^2$	β	$\frac{3}{8}$
AT2	$(1 - \beta)^2$	β^2	$\frac{1}{2}$
CZM	$\frac{(1 - \beta)^2}{(1 + \rho\beta)^2}$	$2\beta - \beta^2$	$\frac{1}{\pi}$

Tabla 1: Expresiones de la función de degradación $R(\beta)$ y de la función geométrica de la fractura $\mu(\beta)$ para diferentes modelos de daño por gradientes regularizados.

Conjeturamos que el funcional \mathcal{F}_ℓ Γ -converge hacia \mathcal{F} . Como consecuencia, se considera el siguiente problema incremental:

$$\begin{aligned}
 &\text{Dado: } \beta_{n,\ell}, \mathcal{L}_{n+1}, \mathbf{u}_{D,n+1}, \mathbf{t}_{N,n+1} \quad n = 0, \dots, N-1, \\
 &\text{Encontra } (\mathbf{u}_{n+1,\ell}, \beta_{n+1,\ell}) \text{ tal que} \\
 &\quad \text{minimicen } \mathcal{F}_\ell(t_{n+1}, \mathbf{u}, \beta) \\
 &\quad \text{sujeto a } \beta \geq \beta_{n,\ell}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Si $(\mathbf{u}_{n+1,\ell}, \beta_{n+1,\ell})$ es un punto de ℓ -mínimo global del funcional \mathcal{F}_ℓ , y si $(\mathbf{u}_{n+1,\ell}, \beta_{n+1,\ell}) \rightarrow (\mathbf{u}, \chi_\Gamma)$ como $\ell \rightarrow 0$, entonces se puede concluir que (\mathbf{u}, Γ) es un punto de mínimo global de

(1), de acuerdo con (Ambrosio et al., 2000, Prop. 6.13). Dado un funcional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ acotado inferiormente, se dice que $x_0 \in X$ es un punto de ϵ -mínimo global de F si, dado $\epsilon > 0$, se cumple que $F(x_0) < \inf_{x \in X} F + \epsilon$ (Ambrosio et al., 2000).

3. COTAS ENERGETICAS EN LOS PUNTOS DE MINIMO GLOBAL

A partir del resultado establecido al final de la sección anterior, es evidente que la validez teórica de la formulación variacional de la fractura depende de la capacidad de aproximar los puntos de mínimo global del problema incremental (3). No obstante, como este resultado está formulado para ϵ -mínimos globales, no se requiere una determinación exacta del mínimo. En efecto, una aproximación suficientemente buena, un ϵ -mínimo, es teóricamente aceptable, ya que también conduce a la convergencia en el marco de la Γ -convergencia.

En esta sección, se introducen una serie de condiciones adicionales que son satisfechas exclusivamente en estos puntos. Estas condiciones se utilizarán en la siguiente sección para el diseño de una estrategia numérica que evita recurrir a métodos de minimización global.

Sean (\mathbf{u}_n, β_n) y $(\mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1})$ las soluciones del problema (3) correspondientes a los instantes de tiempo t_n y t_{n+1} , con $n = 0, \dots, N - 1$, respectivamente.

En el caso particular de que no existan fuerzas volumétricas ($\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ para todo $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T]$), las condiciones de Neumann sean homogéneas ($\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ para todo $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_N \times [0, T]$) y las condiciones de Dirichlet sean de tipo afín en el tiempo ($\mathbf{u}_D(\mathbf{x}, t) = t \mathbf{u}_{D,0}(\mathbf{x})$ para todo $(\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_D \times [0, T]$), se verifica la siguiente desigualdad (Bourdin, 2007):

$$\mathcal{F}_\ell(t_n, \mathbf{u}_n, \beta_n) \leq \mathcal{F}_\ell\left(t_n, \frac{t_n}{t_{n+1}} \mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1}\right).$$

Es decir,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [R(\beta_n) \psi_0^+(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n)) + \psi_0^-(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_n))] \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \left(\frac{g_c}{c\ell} \mu(\beta_n) + \frac{g_c\ell}{c} |\nabla \beta_n|^2 \right) \, d\mathbf{x} \\ & \leq \int_{\Omega} \left[R(\beta_{n+1}) \psi_0^+\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{t_n}{t_{n+1}} \mathbf{u}_{n+1}\right)\right) + \psi_0^-\left(\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{t_n}{t_{n+1}} \mathbf{u}_{n+1}\right)\right) \right] \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega} \left(\frac{g_c}{c\ell} \mu(\beta_{n+1}) + \frac{g_c\ell}{c} |\nabla \beta_{n+1}|^2 \right) \, d\mathbf{x} := \text{BB}. \end{aligned} \tag{4}$$

Si esta condición es violada, la solución (\mathbf{u}_n, β_n) no es un mínimo global, dado que $(t_n/t_{n+1} \mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1})$ sería una solución admisible con valor energético menor. Es importante precisar que, en (4), el campo de desplazamiento se descompone como $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}_D + \mathbf{u}_0$, donde $\tilde{\mathbf{u}}_D \in H^1(\Omega)$ es un "lifting" de los datos de Dirichlet \mathbf{u}_D , es decir, una función definida en todo Ω tal que $\tilde{\mathbf{u}}_D(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_D(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega_D$. Por su parte, $\mathbf{u}_0 \in H_{\partial\Omega_D}^1(\Omega)$, es decir, $\mathbf{u}_0 \in H^1(\Omega)$ y satisface la condición homogénea $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ en $\partial\Omega_D$.

Por otro lado, en (Luege y Orlando, 2021; Luege et al., 2025), en un contexto más general donde pueden estar presentes fuerzas volumétricas, condiciones de Neumann no homogéneas y condiciones de Dirichlet arbitrarias, se establece que $(\mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1})$ y (\mathbf{u}_n, β_n) satisfacen las

siguientes cotas energéticas:

$$\begin{aligned}
 LB_n &:= \mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1}) - \mathcal{E}(t_n, \mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1}) \\
 &\leq \underbrace{\tilde{\mathcal{E}}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1}) - \tilde{\mathcal{E}}(t_n, \mathbf{u}_n, \beta_n)}_{\Delta \tilde{\mathcal{E}}_n} + \underbrace{\int_{\Omega} \frac{g_c}{c\ell} (\mu(\beta_{n+1}) - \mu(\beta_n)) \, dx}_{\mathcal{D}_n(\beta_{n+1}, \beta_n)} \\
 &\leq \mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{u}_n, \beta_n) - \mathcal{E}(t_n, \mathbf{u}_n, \beta_n) := UB_n.
 \end{aligned} \tag{5}$$

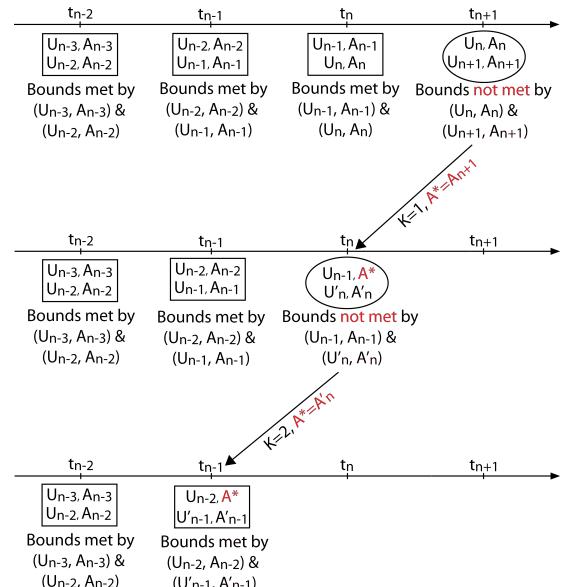
Si una de estas dos cotas es violada, entonces $(\mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1})$ no es un mínimo global. Esto también podría implicar que (\mathbf{u}_n, β_n) tampoco lo es si es necesario retroceder más de un paso en el algoritmo.

4. ALGORITMOS DE BACKTRACKING

El algoritmo se ilustra en el contexto de la resolución, con el método de variables alternadas, de las condiciones de optimalidad del funcional (2), al cual se suma una función penalizadora para imponer la restricción $\beta \geq \beta_n$. Esta penalización es del tipo $(1/\alpha)\varphi(\beta - \beta_n)$, donde φ es una función convexa y diferenciable que satisface $\varphi(x) \geq 0$ para todo x , y $\varphi(x) = 0$ únicamente cuando $x \geq 0$. Por ejemplo, $\varphi(x) = (\langle x \rangle_+)^2$ donde $\langle x \rangle_+ = (x + |x|)/2$. El factor de penalización $\alpha > 0$ se toma con un valor muy pequeño para asegurar la convergencia del método (Gerasimov y De Lorenzis, 2019).

Algoritmo de Backtracking	
Data:	N, K, η (tolerancia cota), $(\mathbf{U}_0, \mathbf{A}_0)$
Result:	$(\mathbf{U}_n, \mathbf{A}_n)$ $n = 1, \dots, N$
1	set
3	$n = 0$
5	$\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}_0, \mathbf{U}^0 = \mathbf{U}_0$
7	repeat
9	solve
11	input : $\mathbf{A}^0, \mathbf{U}^0, \mathbf{A}_n$
13	Algoritmo de MA: $(\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = \text{ARGMIN } \mathcal{F}(t_{n+1}, \mathbf{U}, \mathbf{A}; \mathbf{A}_n)$
15	output: $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}$
16	set
18	$\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}_{n+1}, \mathbf{U}^0 = \mathbf{U}_{n+1}$
20	if Cotas (4) \wedge (5) son satisfechas then
22	$n \leftarrow n + 1$ (Proceda al siguiente paso)
23	else
25	$b = 0$ (Contador de regresos)
27	repeat
29	$n \leftarrow n - 1$ (Regresa un paso)
31	$b = b + 1$
33	solve
35	input : $\mathbf{A}^0, \mathbf{U}^0, \mathbf{A}_n$
37	Algoritmo de MA: $(\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = \text{ARGMIN } \mathcal{F}(t_{n+1}, \mathbf{U}, \mathbf{A}; \mathbf{A}_n)$
39	output: $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}$
40	set
42	$\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}_{n+1}, \mathbf{U}^0 = \mathbf{U}_{n+1}$
43	until Cotas (4) \wedge (5) son satisfechas $\vee b = K$
45	$n \leftarrow n + 1$ (Proceda al siguiente paso)
46	until $n = N$

(a)



(b)

Figura 1: (a) Algoritmo de backtracking y (b) Posibles situaciones para backtracking considerando $K = 2$. Cada cuadrado/círculo contiene la estimación inicial/solución del Problema (3).

En cada paso de tiempo, se controlan las cotas (4) y (5). Si alguna de estas condiciones es violada por las soluciones computadas $(\mathbf{u}_{n+1}, \beta_{n+1})$ y (\mathbf{u}_n, β_n) , se retrocede un número predefinido K de pasos de tiempo y se reinicia el proceso de minimización alternada, utilizando un valor inicial distinto para la variable de campo de fase β . La idea es proporcionar una mejor

estimación inicial para el método de Newton, con el fin de evitar caer en la cuenca de atracción de un punto crítico del funcional $\mathcal{F}_\ell(t, \mathbf{u}, \beta)$ asociado a un estado de energía más alto.

La Figura 1 muestra una implementación conceptual del algoritmo en términos de las variables discretas \mathbf{U} y \mathbf{A} , que representan aproximaciones por elementos finitos de \mathbf{u} y β , respectivamente, junto con una ilustración de los posibles escenarios de backtracking.

5. EJEMPLO NUMÉRICO

En esta sección se analiza el desempeño de los algoritmos de backtracking en combinación con el esquema de minimización alternada del funcional $\mathcal{F}_\ell(t, \mathbf{u}, \beta)$ en la simulación numérica de fractura en un ensayo de tracción con entalla lateral (single edge notched), utilizando el modelo regularizado AT2. El modelo mecánico, junto con la malla de elementos finitos, se muestran en la Figura 2. Se trata de un problema de referencia ampliamente estudiado en la literatura (Miehe et al., 2010).

Se considera una carga controlada por desplazamiento, con incrementos $\Delta w = 10^{-5}$ mm. Este incremento relativamente grueso permite observar diferencias claras entre las soluciones obtenidas con y sin el algoritmo de backtracking, en particular respecto a la admisibilidad energética y la consistencia física en la evolución del daño.

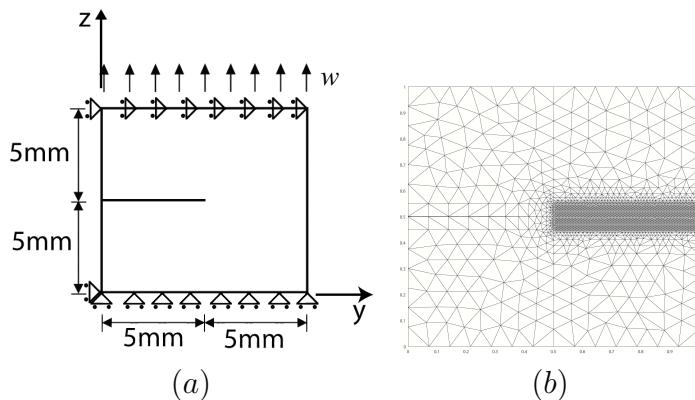


Figura 2: Ensayo de tracción con entalla lateral. (a) Geometría del espécimen y condiciones de borde. (b) Malla no estructurada de elementos finitos.

Cuando el algoritmo de backtracking no está activado, las soluciones discretas se obtienen avanzando en el tiempo sin verificar la consistencia energética, es decir, sin imponer las cotas energéticas (4) y (5). Como se observa en la Figura 3(a), la trayectoria de la energía total computada presenta una marcada forma de *burbuja* durante la fase de evolución del daño. Esto se debe a la incapacidad del esquema de minimización alternada estándar para escapar de mínimos locales, lo que lleva a una secuencia de configuraciones energéticamente subóptimas. La violación de las cotas energéticas indica claramente que la solución obtenida no puede considerarse una solución energéticamente admisible.

Al activar la estrategia de backtracking ilustrada en la Figura 1(a), la trayectoria de la solución se corrige para garantizar el cumplimiento de las cotas energéticas. En cada incremento, la solución computada se verifica respecto a las condiciones (4) y (5). Si alguna de las dos desigualdades no se cumple, el algoritmo retrocede hasta K pasos, reiniciando la minimización con una estimación inicial actualizada basada en el último campo de daño. Este proceso se repite hasta encontrar una solución energéticamente admisible o alcanzar el número máximo de pasos de retroceso. Si al pesar de los retrocesos no se encuentra solución que verifique las cotas,

incluyendo el caso en el cual el algoritmo entra en un ciclo indefinido, las opciones son ajustar las tolerancias y/o reducir el paso de carga. Cabe destacar que esta situación no ocurrió en la simulación presentada.

La Figura 3(c) muestra que, al aplicar el backtracking, el incremento energético se mantiene consistentemente dentro de los límites prescritos, restaurando así la consistencia energética y permitiendo al algoritmo identificar trayectorias de daño físicamente significativas. La evolución resultante de la energía total es suave, monótona y libre de la burbuja artificial observada con el esquema estándar.

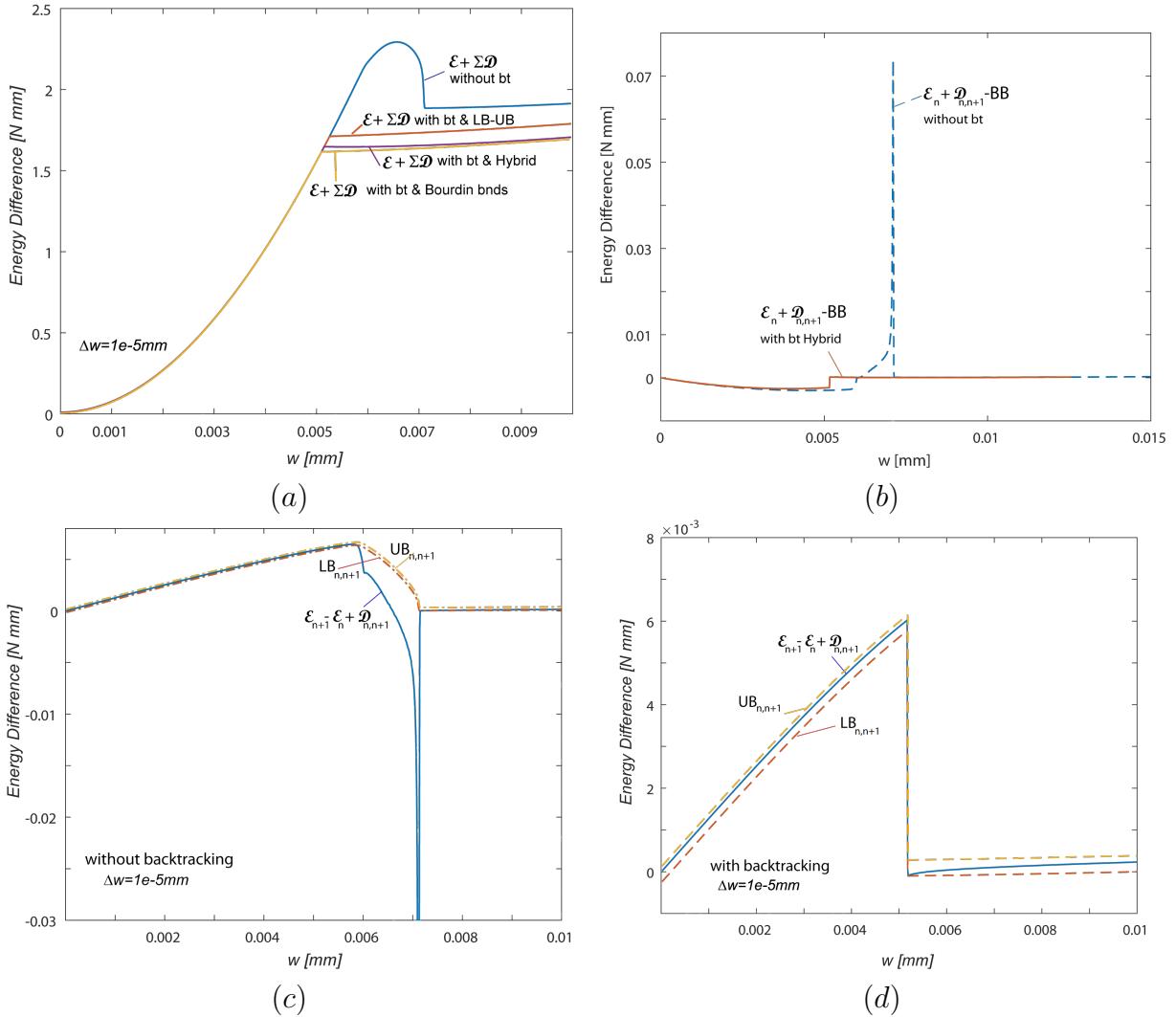


Figura 3: Resultados para $\Delta w = 10^{-5}\text{mm}$. (a) Evolución de la energía total $\mathcal{E}(t_{n+1}, \mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) + \sum_{i=0}^n \mathcal{D}(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{i+1})$, para $n = 0, 1, \dots, N-1$, sin backtracking ($K = 0$) y con backtracking ($K = 50$), utilizando únicamente la cota (4), únicamente las cotas (5), o bien el algoritmo híbrido ilustrado en la Figura 1(a). (b) Evolución de la energía incremental total $\mathcal{E}_n + \mathcal{D}_{n,n+1}$ sin bactracking y con backtracking híbrido. (c) Evolución de la energía incremental total $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n + \mathcal{D}_{n,n+1}$ junto con las cotas (5), sin backtracking. (d) Evolución correspondiente con backtracking.

A partir de la comparación entre estrategias de backtracking basadas exclusivamente en (4) o en (5), mostrada en la Figura 3(b) y (c), se puede inferir que las cotas (5) proporcionan un control más estricto sobre la evolución energética, aunque pueden conllevar una mayor frecuencia

de pasos de retroceso. Por su parte, la cota (4) resulta más sencilla de evaluar y menos restrictiva, lo que implica menos pasos de retroceso, aunque con una corrección energética potencialmente menos precisa, y aplicable solo para variaciones monótonas de las condiciones al contorno de tipo Dirichlet.

Mediante una estrategia híbrida se logra un equilibrio adecuado, asegurando la admisibilidad energética sin incurrir en costos computacionales innecesarios.

6. CONCLUSIONES

El uso del algoritmo de backtracking, especialmente en conjunto con las cotas energéticas (5), mejora significativamente la calidad de las soluciones computadas. En regímenes de incrementos gruesos, como $\Delta w = 10^{-5}$ mm, este enfoque resulta crucial para imponer admisibilidad energética y evitar trayectorias físicamente inconsistentes debidas a atrapamientos en mínimos locales.

La cota superior (4) sigue siendo una alternativa válida en aplicaciones donde la eficiencia computacional es prioritaria, mientras que la estrategia híbrida ofrece una combinación robusta y flexible, equilibrando precisión y costo computacional.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero parcial del CONICET y la UNT a través de los Proyectos PIP 2023–2025 634 y PIUNT CX-E729, respectivamente.

REFERENCIAS

- Ambrosio L., Fusco N., y Pallara D. *Functions of bounded variations and free discontinuity problems*. Oxford University Press, 2000.
- Amor H., Marigo J., y Maurini C. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact: Numerical experiments. *J. Mech. Phys. Solids*, 57:1209–1229, 2009.
- Bourdin B. Numerical implementation of the variational formulation for quasi-static brittle fracture. *Interfaces Free Boundaries*, 9:411–430, 2007.
- Bourdin B., Francfort G., y Marigo J. *The Variational Approach to Fracture*. Springer-Verlag, New York, 2008.
- Francfort G. y Marigo J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids*, 46:1319–1342, 1998.
- Gerasimov T. y De Lorenzis T. On penalization in variational phase-field models of brittle fracture. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 354:990–1026, 2019.
- Lorentz E. y Godard V. Gradient damage models: Toward full-scale computations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 200:1927–1944, 2011.
- Luege M., Campra A., y Orlando A. Numerical simulation of a variational phase-field model for thermoelastic quasi-brittle fracture. 2025. *En preparación*.
- Luege M. y Orlando A. A variational asymmetric phase-field model of quasi-brittle fracture: Energetic solutions and their computation. *Int J Solids Struct*, 225:110940, 2021.
- Miehe C., Hofacker M., y Welschinger F. A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 199:2765–2778, 2010.
- Wu J. A unified phase-field theory for the mechanics of damage and quasi-brittle failure in solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 103:20–42, 2017.

Wu J., Nguyen V., Nguyen C., Sutula D., Sinaie S., y Bordas S. Phase-field modeling of fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 53:1–183, 2020.