

# **ANÁLISIS DINÁMICO DEL IMPACTO DE TENSIONES INICIALES EN EL ESTUDIO DE BANDAS DE ATENUACIÓN EN VIGAS FUNCIONALMENTE GRADADAS INCORPORANDO RESONADORES MECÁNICOS**

## **DYNAMIC ANALYSIS OF THE IMPACT OF INITIAL STRESSES ON THE STUDY OF ATTENUATION BANDS IN FUNCTIONALLY GRADED BEAMS INCORPORATING MECHANICAL RESONATORS**

**Walter Horacio Fruccio<sup>a</sup>, Federico Masch<sup>a</sup>, Marcelo Tilio Piovan<sup>b</sup> y Rogelio Hecker<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa. Calle 110 N°390, 6360, Gral Pico, Pcia La Pampa. Argentina , <http://www.ing.unlpam.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Universidad Tecnológica Nacional FRBB. 11 de Abril 461, B8000LM, Centro de Investigaciones de Mecánica Teórica y Aplicada, Bahía Blanca, Pcia Buenos Aires. Argentina . , <http://www.frbb.utn.edu.ar>*

**Palabras clave:** Meta-estructuras, Resonadores Mecánicos, Tensiones Iniciales.

**Resumen.** Las meta-estructuras, diseñadas para exhibir propiedades dinámicas excepcionales a través de la incorporación de elementos resonantes, son el foco de este trabajo. En el mismo, se presenta un análisis dinámico de vigas de paredes delgadas construidas mediante materiales funcionalmente gradados, transformadas en metaestructuras mediante la inclusión de resonadores mecánicos locales. El modelo de viga desarrollado incorpora la flexibilidad por corte generalizada para flexión y torsión con alabeo no uniforme, y las ecuaciones que gobiernan el problema dinámico se obtienen a través del principio de trabajo virtual. Este estudio, se enfoca en cuantificar el impacto de las tensiones iniciales o de precarga en el fenómeno de aparición de bandas de atenuación. Se evalúa la influencia en las frecuencias naturales y consecuentemente, en las bandas de atenuación generadas por la interacción entre la estructura portante y los resonadores mecánicos. Para abordar la incertidumbre inherente en las propiedades de los materiales gradados, la geometría y las tensiones iniciales, se construye un modelo computacional empleando el método de elementos finitos. Se aplicarán técnicas de modelado probabilístico para analizar la propagación de estas incertidumbres y su influencia en la predicción de las bandas de atenuación.

**Keywords:** Meta-Structures, Mechanical Resonators, Initial Stresses.

**Abstract.** This work focuses on the dynamic analysis of thin-walled beams transformed into meta-structures by incorporating mechanical resonators. These beams are made from functionally graded materials. The primary goal is to quantify how pre-stress affects the formation of attenuation bands. The research investigates the influence of pre-stress on natural frequencies and the resulting attenuation bands created by the interaction between the main structure and the mechanical resonators. To account for uncertainties in material properties, geometry, and pre-stress, a computational model based on the finite element method is used. Probabilistic modeling techniques are applied to analyze how these uncertainties propagate and influence the prediction of the attenuation bands.

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio de las meta-estructuras ha surgido como un campo de investigación vibrante y prometedor en la ingeniería moderna. Estos materiales, diseñados para exhibir propiedades dinámicas inusuales, como la atenuación de vibraciones en rangos de frecuencia específicos, han captado el interés por su potencial para superar las limitaciones de los materiales convencionales (Sun et al., 2023). La clave de su funcionamiento reside en la incorporación de elementos resonantes o de una periodicidad específica en su estructura, lo que genera las denominadas bandas de atenuación (bandgaps) (Dwivedi et al., 2024).

Una de las principales estrategias para la creación de estas meta-estructuras es el uso de materiales funcionalmente graduados (FGM, por sus siglas en inglés) (Karimzadeh et al., 2024). Los FGM permiten una personalización precisa de las propiedades del material en una dirección seleccionada, lo que resulta en mejoras sustanciales en el comportamiento mecánico de la estructura portante (Karimzadeh et al., 2024; Li et al., 2017). Por ejemplo, la investigación de Li et al. (2017) proporciona un marco para el análisis de vigas graduadas, mientras que estudios más recientes como el de Amir et al. (2024) han abordado el análisis de vibración de vigas curvas graduadas y la incertidumbre en sus frecuencias naturales. Sin embargo, a pesar de los avances en el campo, el impacto de las tensiones iniciales (o de precarga) en el fenómeno de bandgaps en meta-estructuras ha sido un área menos explorada. La presencia de tensiones iniciales es inherente en muchos procesos de manufactura y montaje y puede alterar significativamente la rigidez de una estructura, lo que a su vez modifica sus frecuencias naturales y, por ende, las características de las bandas de atenuación. Es por ello que el análisis probabilístico se presenta como una herramienta poderosa para abordar incertidumbres en las propiedades del material o en las tensiones iniciales.

El presente trabajo aborda estos huecos mediante un análisis dinámico integral del impacto de las tensiones iniciales en la formación y las propiedades de las bandas de atenuación en vigas de paredes delgadas funcionalmente graduadas, incorporando resonadores mecánicos locales. Se desarrolla un modelo de viga que incluye flexibilidad por corte generalizada para flexión y torsión con alabeo no uniforme, y se utiliza el principio de trabajo virtual para derivar las ecuaciones que gobiernan la dinámica estructural. La metodología computacional utilizada, se basa en el método de elementos finitos y, para cuantificar el impacto de las incertidumbres, se aplica un enfoque de modelado probabilístico (Amir et al., 2024). El objetivo es evaluar cómo las tensiones iniciales modifican las frecuencias naturales del sistema y las características de las bandas de atenuación, proporcionando así información esencial para el diseño y optimización de estructuras avanzadas con capacidades de atenuación ajustables y fiables frente a la incertidumbre.

## 2. DESARROLLO

### 2.1. Desarrollo del modelo determinístico.

Se considera una viga finita de paredes delgadas con eje curvo, como se aprecia en la Fig. 1. La misma tiene un radio de curvatura  $R$  constante, la sección transversal es simétrica e incluye resonadores mecánicos adosados a lo largo de la longitud de la viga. En la Fig. 1 se describe el sistema de referencia primario  $\{C : X, Y, Z\}$  el cual se encuentra ubicado en el centro geométrico de la sección transversal, donde el eje  $X$  es tangente al eje circular de la viga, mientras que los ejes  $\{Y, Z\}$  se tomaran como los ejes principales de inercia y pertenecen a la sección transversal de la viga.

El modelo teórico de la meta-estructura portante se basa en las siguientes hipótesis:

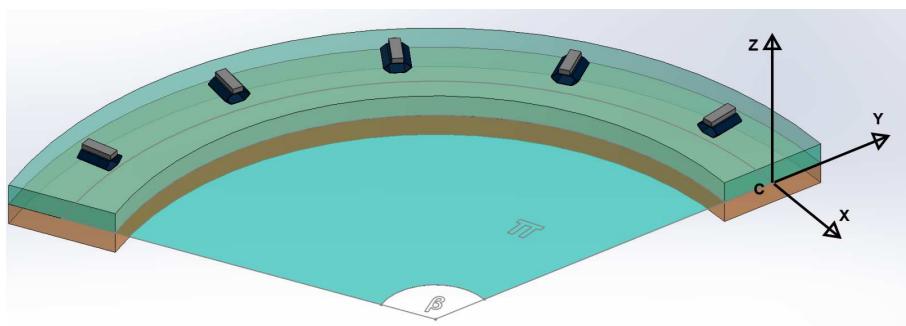


Figura 1: Viga curva de pared delgada con resonadores mecánicos adosados.

A-La sección transversal de la viga curva tiene la configuración de paredes delgadas. B-La sección trasversal es regular y rígida en su propio plano. C-El campo de desplazamientos tendrá los términos lineales y no lineales de primer orden para su descripción. D-Se considera el esfuerzo cortante producido por flexión y torsión. Se define una función de alabeo referida al centroide. E-La viga está construida con componentes metálicos y cerámicos que varían en la dirección Z. F-Los resonadores mecánicos tendrán como dirección de aplicación el eje Z.

Teniendo en cuenta las hipótesis antes descriptas, tendremos el siguiente vector de desplazamientos generalizados ([Piovan et al., 2012](#)).

$$\{ U \} = \{ u_X^L + u_X^{NL}, u_Y^L + u_Y^{NL}, u_Z^L + u_Z^{NL} \} = \{ u_i^L \} + \{ u_i^{NL} \} \quad (1)$$

donde  $\{U\}$  es el vector de desplazamientos generalizados, conformado por una parte lineal  $\{u_i^L\}$  y otra no lineal  $\{u_i^{NL}\}$ .

$$\begin{Bmatrix} u_X^L \\ u_Y^L \\ u_Z^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x - \underline{\omega} \Phi_w \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Phi_3 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & 0 & -\Phi_1 \\ -\Phi_2 & \Phi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} u_X^{NL} \\ u_Y^{NL} \\ u_Z^{NL} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\Phi_3^2 - \Phi_2^2 & \Phi_1 \Phi_2 & \Phi_1 \Phi_3 \\ \Phi_1 \Phi_2 & -\Phi_1^2 - \Phi_3^2 & \Phi_2 \Phi_3 \\ \Phi_1 \Phi_3 & \Phi_2 \Phi_3 & -\Phi_1^2 - \Phi_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Donde

$$\Phi_1 = \phi_x \quad \Phi_2 = \theta_y \quad \Phi_3 = \theta_z - \frac{u_x}{R} \quad \Phi_w = \theta_x + \frac{\theta_y}{R} \quad (4)$$

De la Ec. (1) se desprende que:  $u_x, u_y, u_z$  serán los desplazamientos del centro de referencia,  $\theta_z$  y  $\theta_y$  parámetros de rotación flexional,  $\theta_x$  es el parámetro que indica la intensidad de alabeo y por último  $\phi_x$  que es el parámetro de rotación torsional. La función de alabeo puede ser aproximada con la siguiente expresión ([Piovan et al., 2012](#)).

$$\underline{\omega} = \bar{\omega} F \quad \text{donde} \quad F = \frac{R}{R + y} \quad (5)$$

Siendo  $\underline{\omega}$  la función de alabeo y  $\bar{\omega}$  la función de alabeo deducida del problema de torsión pura de Saint Venant. Y donde el factor F cuantifica el efecto de la curvatura a lo largo de la viga.

## 2.2. Principio de trabajo virtual. Campo de deformaciones.

Conforme al campo de desplazamientos generalizados, antes descripto, es posible definir una expresión genérica del principio de trabajo virtual para un cuerpo que presenta un estado de tensiones iniciales arbitrarias (Piovan et al., 2012).

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_T = & \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}^L dV + \int_V \sigma_{ij}^0 \delta \epsilon_{ij}^{NL} dV - \int_V \bar{X}_i^0 \delta u_i^{NL} dV - \int_S \bar{T}_i^0 \delta u_i^{NL} dS \\ & - \int_V \bar{X}_i \delta u_i^L dV - \int_S \bar{T}_i \delta u_i^L dS + \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i^L dV = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Donde  $\sigma_{ij}^0$ ,  $\bar{X}_i^0$  y  $\bar{T}_i^0$  generan un estado de autoequilibrio inicial definido por:

$$\mathcal{W}_T^0 = \int_V \sigma_{ij}^0 \delta \epsilon_{ij}^L dV - \int_V \bar{X}_i^0 \delta u_i^L dV - \int_S \bar{T}_i^0 \delta u_i^L dS = 0 \quad (7)$$

De las cuales, se define  $\sigma_{ij}$  y  $\sigma_{ij}^0$  como las tensiones incrementales e iniciales,  $\bar{X}_i$  y  $\bar{X}_i^0$  como las fuerzas de volumen incrementales e iniciales aplicadas en el dominio V,  $\bar{T}_i^0$  y  $\bar{T}_i^0$  como las fuerzas de superficie incrementales e iniciales aplicadas en el dominio S, y  $\rho$  como la densidad.

Luego, se definen las componentes del tensor de deformaciones de Green Lagrange  $\epsilon_{ij}$ , de la siguiente manera. Donde se desprecian las componentes de segundo orden debidas a desplazamientos lineales y no lineales.

$$\epsilon_{ij}^L = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j^L}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^L}{\partial x_j} \right) \quad \epsilon_{ij}^{NL} \cong \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j^{NL}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^{NL}}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_h^L}{\partial x_i} \frac{\partial u_h^L}{\partial x_j} \right) \quad (8)$$

Inmediatamente, se realiza la sustitución de las Ec. (2) y Ec. (3) dentro de la Ec. (8) y luego dentro de la Ec. (6) para obtener la siguiente expresión del principio de trabajo virtual, con los respectivos operadores variacionales.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_T = & \int_L (\delta \tilde{\mathbf{D}}_N^T \tilde{\mathbf{Q}}_N + \delta \tilde{\mathbf{D}}_C^T \tilde{\mathbf{Q}}_C) dx + \int_L \delta \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}_m \ddot{\tilde{\mathbf{U}}} dx - \int_L \delta \tilde{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{P}}_X dx \\ & - \int_L \delta \tilde{\mathbf{D}}_G^T \mathbf{T}_G^0 \tilde{\mathbf{D}}_G dx - \int_L \delta \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{C}_X^0 \dot{\tilde{\mathbf{U}}} dx - \delta \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{C}_S^0 \tilde{\mathbf{U}} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Donde definimos el vector desplazamiento  $\tilde{\mathbf{U}}^T$ , los vectores de deformación  $\tilde{\mathbf{D}}_N^T$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_C^T$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_G$  y los vectores de fuerzas internas  $\tilde{\mathbf{Q}}_N$  y  $\tilde{\mathbf{Q}}_C$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^T &= \{u_{xc}, u_{yc}, \theta_z, u_{zc}, \theta_y, \phi_x, \theta_x\} \quad \tilde{\mathbf{U}}_\Phi^T = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_W\} \\ \tilde{\mathbf{D}}_N^T &= \{\varepsilon_{D1}, \varepsilon_{D2}, \varepsilon_{D3}, \varepsilon_{D4}\} \quad \tilde{\mathbf{D}}_C^T = \{\varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\} \\ \tilde{\mathbf{D}}_G^T &= \left\{ \tilde{\mathbf{D}}_N, \tilde{\mathbf{D}}_C, \tilde{\mathbf{U}}_\Phi, \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_\Phi}{\partial x} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_N^T = \{Q_x, M_y, M_z, B\} \quad \tilde{\mathbf{Q}}_C^T = \{Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\}$$

Por ultimo, se definen los siguientes términos, que fueron utilizados en la Ec. (9), la matriz de las resultantes de tensión inicial  $\mathbf{T}_G^0$ , las matrices de fuerzas iniciales  $\mathbf{C}_X^0$  y  $\mathbf{C}_S^0$ , la matriz de coeficientes de masa  $\mathbf{M}_m$  y el vector  $\mathbf{P}_X$  de fuerzas externas.

### 2.3. Discretización en elementos finitos.

Se emplea un elemento finito unidimensional, en base a la formulación débil de las ecuaciones que rigen la estática y dinámica de la meta-estructura. La formulación del elemento finito se obtiene mediante la discretización de la Ec. (9), donde se utilizan elementos de 5 nodos y funciones de forma cuárticas (Piovan et al., 2012). Dentro del presente trabajo, se utilizará un discretización de 15 elementos. El vector de las variables de desplazamiento se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{U}_e &= \{\bar{U}_e^{(1)}, \bar{U}_e^{(2)}, \bar{U}_e^{(3)}, \bar{U}_e^{(4)}, \bar{U}_e^{(5)}\} \\ \bar{U}_e^{(j)} &= \{u_{xcj}, u_{ycj}, \theta_{zj}, u_{zcj}, \theta_{ycj}, \phi_{xcj}, \theta_{xcj}\} \quad j = 1, 2, 3, 4, 5\end{aligned}\quad (11)$$

A partir de la formulación débil devenida del principio de trabajo virtual y aplicando los procedimientos variacionales convencionales, se obtiene la siguiente ecuación de elementos finitos:

$$\begin{aligned}(K + K_G)U + C\dot{U} + M\ddot{U} &= F \\ C &= \eta_1 M + \eta_2 K\end{aligned}\quad (12)$$

donde  $K$ ,  $K_G$  y  $M$  son las matrices globales de rigidez elástica, rigidez geométrica y masa,  $C$  es la matriz de amortiguamiento proporcional de Rayleigh, mientras que  $U$ ,  $\dot{U}$  y  $F$  son los vectores globales de desplazamientos nodales, aceleraciones nodales y fuerzas nodales, respectivamente. Por otra parte, la matriz de rigidez geométrica puede calcularse una vez conocidas las tensiones iniciales para una configuración de carga inicial dada. Estas tensiones iniciales se calculan con la resolución de la siguiente ecuación:

$$[K] \{U^0\} = \{F^0\} \quad (13)$$

Donde  $U^0$  y  $F^0$  son el vector global de los desplazamientos nodales iniciales y el vector global de todas las fuerzas iniciales puntuales, volumétricas y superficiales, respectivamente. La Ec. (13) corresponde a la forma de elementos finitos de la condición de autoequilibrio de las tensiones iniciales introducidas en la La Ec. (7).

Con lo cual el método de elementos finitos y la respuesta en el dominio de la frecuencia del sistema dinámico dada por la Ec. (8), deriva en la siguiente ecuación matricial correspondiente a la dinámica del modelo:

$$\hat{U} = [K + \lambda K_G - \omega^2 M + j\omega C]^{-1} \hat{F} \quad (14)$$

Donde  $\hat{U}$  y  $\hat{F}$  son la transformada de Fourier del vector de desplazamiento y el vector de fuerza, respectivamente; mientras  $\omega$  es la frecuencia circular medida en [rad/seg] y  $\lambda$  es un parámetro definido para la caracterización de las tensiones iniciales, que puede utilizarse para el cálculo de las cargas de pandeo cuando se impone la condición  $\omega = 0$  en la Ec. (14).

### 2.4. Incorporación de los resonadores mecánicos.

Se incorpora la dinámica de los resonadores mecánicos masa-resorte, dentro de las ecuaciones de equilibrio de la estructura portante.

$$m_j \ddot{\bar{u}}_{zj} + k_j \bar{u}_{zj} = k_j u_{zj} \quad j = 1, \dots, N \quad (15)$$

Donde  $\bar{u}_{zj}$  es la coordenada del resonador con respecto a la dirección del eje en el cual están actuando. El desarrollo de la dinámica de los resonadores a lo largo de la viga, y el posterior

reemplazo dentro de la parte inercial de la formulación débil de la Ec. (9), modificarán la matriz global de masa. Se introduce un coeficiente  $\alpha$ , para incorporar la dinámica de los resonadores, que es el cociente entre la masa total de los resonadores mecánicos y la masa de la viga (masa distribuida). El coeficiente  $\alpha$  se define de la siguiente manera:

$$\alpha_j = \frac{m_j}{\rho A l_M} \quad (16)$$

Donde  $m_j$  es la masa de cada uno de los resonadores,  $l_M$  es la distancia entre los mismos a lo largo de la longitud de la viga,  $A$  y  $\rho$  son el área de la sección transversal y la densidad de la estructura portante. De esta manera, al introducir la dinámica de los resonadores, y teniendo en cuenta la hipótesis que contempla un sistema viga-resonadores distribuidos continuamente e idénticamente iguales, para una cantidad de resonadores infinitos, desarrollada por (Sugino et al., 2016), se obtiene una nueva matriz global de masa  $\hat{M}$ , que nos deriva en una nueva ecuación matricial correspondiente a la dinámica del modelo con resonadores mecánicos adosados.

$$\hat{U} = [K + \lambda K_G + j\omega C - \omega^2 \hat{M}]^{-1} \hat{F} \quad (17)$$

## 2.5. Modelo estocástico.

El modelo estocástico se construye a partir de la formulación de elementos finitos del modelo determinístico, seleccionando los parámetros inciertos y asociándoles variables aleatorias. Se utiliza el principio de máxima entropía para obtener las funciones de densidad de probabilidades (PDF). Las variables aleatorias  $V_i$  con  $i=1,2,3$  se consideran acotadas, cuyos valores límites son conocidos. En este sentido, se asume que el valor medio de las mismas coincide con el valor nominal determinístico de cada uno de los parámetros seleccionados  $\mathcal{E}\{V_i\} = \underline{V}_i$ ,  $i=1,2,3$  con el fin de chequear la convergencia. Además, podemos asumir que, al no existir dependencia entre las variables, se toman de forma independiente.

De lo anterior, las PDF de las variables pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$p_{V_i}(v_i) = S[\mathcal{L}_{V_i}, \mathcal{U}_{V_i}](v_i) \frac{1}{\mathcal{U}_{V_i} - \mathcal{L}_{V_i}} = S[\mathcal{L}_{V_i}, \mathcal{U}_{V_i}](v_i) \frac{1}{2\sqrt{3}\underline{V}_i \delta_{vi}}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (18)$$

Donde  $S[\mathcal{L}_{V_i}, \mathcal{U}_{V_i}]$  es el soporte,  $\mathcal{L}_{V_i}$  y  $\mathcal{U}_{V_i}$  son las cotas inferior y superior,  $\underline{V}_i$  es el valor esperado y  $\delta_{vi}$  es el coeficiente de variación, todos pertenecientes a la variable  $V_i$ ,  $i=1,2,3$ . Luego, es utilizada la distribución uniforme, ya que para el estudio de este trabajo se puede obtener el máximo de entropía. En consecuencia y mediante la función de Matlab unifrnd( $V_i(1 - \delta_{vi}\sqrt{3})$ ,  $V_i(1 + \delta_{vi}\sqrt{3})$ ), se generan las realizaciones correspondientes para las variables aleatorias  $V_i$   $i = 1, 2, 3$ . Por ende, y mediante el modelo de elementos finitos de la Ecuación Ec. (14 y 17), a través del método de Monte Carlo, con las PDF definidas en la Ec. (18) el modelo estocástico puede definirse mediante la siguiente expresión.

$$\hat{\mathbb{U}}(\omega) = [\mathbb{K} + \lambda \mathbb{K}_{\mathbb{G}} - \omega^2 \mathbb{M} + j\omega \mathbb{C}]^{-1} \hat{F} \quad (19)$$

Donde la tipografía diferenciada indica que las entidades son estocásticas. Para simular la dinámica estocástica se utiliza el método de Monte Carlo, lo que implica el cálculo de un sistema determinista para cada realización de las variables aleatorias  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . La convergencia de la respuesta estocástica es analizada bajo un criterio de media cuadrática apelando a la siguiente función.

$$conv(N_{MS}) = \sqrt{\frac{1}{N_{MS}} \sum_{j=1}^{N_{MS}} \int_{\Omega} \left\| \widehat{\mathbf{U}}_j(\omega) - \widehat{\mathbf{U}}(\omega) \right\|^2 d\omega} \quad (20)$$

Donde  $N_{MS}$  es el número de muestreros de Monte Carlo y  $\Omega$  es la banda de frecuencia de análisis.  $\widehat{\mathbf{U}}$  es la respuesta del modelo estocástico y  $\widehat{\mathbf{U}}$  es la respuesta del modelo determinista.

## 2.6. Propiedades de los componentes para la viga FGM.

La viga FGM estará compuesta por dos componentes, divididos en dos fases. Una fase metálica y la otra fase de material cerámico. La fase metálica es de Aluminio con modulo de elasticidad longitudinal  $E = 70$  Gpa y densidad  $\rho = 2702 \text{ kg/m}^3$ . Luego, para la otra fase se utilizará un material cerámico, en este caso Alúmina, con modulo de elasticidad longitudinal  $E = 380$  Gpa y densidad  $\rho = 3960 \text{ kg/m}^3$ . Para ambos casos el coeficiente de Poisson es  $\nu = 0,3$ . Las propiedades materiales efectivas de la viga FGM, varían continuamente a través del espesor según la siguiente ley de potencia.

$$p_{fgm} = p_m + (p_c - p_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (21)$$

Donde el termino  $p_{fgm}$  identifica una propiedad gradada genérica (módulo de elasticidad, densidad, etc.), mientras que  $p_c$  y  $p_m$  identifican la propiedad homónima para las fases cerámica y metálica, respectivamente. Luego,  $z$  es la coordenada que recorre la sección transversal de la viga. Este último tipo de distribución de material, implica que la viga de paredes delgadas tiene la parte superior de cerámica y la parte inferior es metálica. El exponente  $n$  es una variable tal que  $n \geq 0$ ; su magnitud da la forma de variación de las propiedades dentro de la sección de la viga, ya que estas varían desde la parte inferior de la viga hasta la parte superior de la misma ([Kahya y Turan, 2017](#)).

## 3. RESULTADOS

### 3.1. Validación del modelo.

En esta sección se realiza una validación del modelo de viga curva FGM donde se compara un parámetro de frecuencia adimensional del modelo 1D de este trabajo, con los resultados correspondientes a tres trabajos seleccionados. El modelo de viga curva desarrollado en este trabajo, se puede reducir al caso de una viga recta, si se impone la condición de  $R \rightarrow \infty$ . El parámetro de frecuencia para ser evaluado se define de la siguiente manera:  $\hat{\omega} = \omega \left( \frac{L^2}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ . Los trabajos seleccionados son los de ([Kahya y Turan, 2017](#); [Le y Nguyen, 2025](#); [Turan et al., 2023](#)), en estos se comparan los valores obtenidos del parámetro adimensional con el modelo numérico 1D del presente trabajo. La comparación se realiza para dos condiciones de contorno diferentes, en este caso Empotrada-Empotrada y Empotrada-Libre, utilizando 15 elementos del modelo de elemento finito, para tres relaciones  $\frac{L}{h}$  diferentes y la primera frecuencia natural de la viga. Ademas, la gradación de la viga FGM se considera en la dirección del eje Z, el material para la fase metálica es aluminio y para la fase de material cerámico es alúmina. Dando como resultado errores cercanos al 2 %. Teniendo en cuenta la cantidad de elementos que fueron utilizados, se puede indicar que el modelo 1D propuesto en este trabajo garantiza una buena obtención de resultados.

Por otro lado, se ejecutó la comparación de un parámetro adimensional para la carga crítica de pandeo. Con dicho parámetro se realizó la comparación y validación de la matriz de rigidez geométrica  $K_G$ . En este caso el parámetro adimensional se define de la siguiente manera:  $\hat{\lambda} = \lambda(\frac{12L^2}{E_m h^3})$ . El trabajo seleccionado para tal comparación es el de (Kahya y Turan, 2017). La misma se realizó para dos condiciones de contorno diferentes, en este caso Empotrada-Empotrada y Empotrada-Libre, para una relación  $\frac{L}{h}$  y para dos valores diferentes del exponente  $n$ . Dando como resultado errores cercanos al 4 %.

### 3.2. Estudios computacionales

Se emplea una viga curva FGM de paredes delgadas, con sección transversal simétrica y ambos extremos empotados. Se ejecutó el análisis bajo una respuesta dinámica para una carga puntual ubicada en el centro de la viga. Los datos más relevantes de la viga curva para la ejecución de los cálculos son los siguientes:  $R = 2\text{ m}$ ,  $L = 1\text{ m}$ ,  $\alpha_j^Z = 0,4$ . La viga curva de paredes delgadas, tiene una sección transversal rectangular, con las siguientes dimensiones:  $b = 0,01\text{ m}$ ,  $h = 0,05\text{ m}$ . La amplitud de la carga puntual es  $F = 1\text{ N}$ . Se selecciona una carga inicial de prueba, para simular la situación de precarga, generada por las masas de los resonadores mecánicos.

La Fig. 2 a) muestra la respuesta dinámica de la solución del elemento finito 1D. Donde se puede apreciar que la curva de la respuesta, que corresponde al desplazamiento con tensiones iniciales, tiene un corrimiento en las frecuencias de resonancia. En cambio en la Fig. 2 b) se puede apreciar la respuesta dinámica con la inclusión de los resonadores mecánicos a lo largo de la viga. En el cual se puede ver, la generación de una banda de atenuación o bandgap, en el sector comprendido en la vecindad del valor de la frecuencia original seleccionada, anulando esta frecuencia específica. Ademas, ante el corrimiento de las frecuencias de resonancia, se puede apreciar que la banda de atenuación se ve sustancialmente modificada por este desplazamiento.

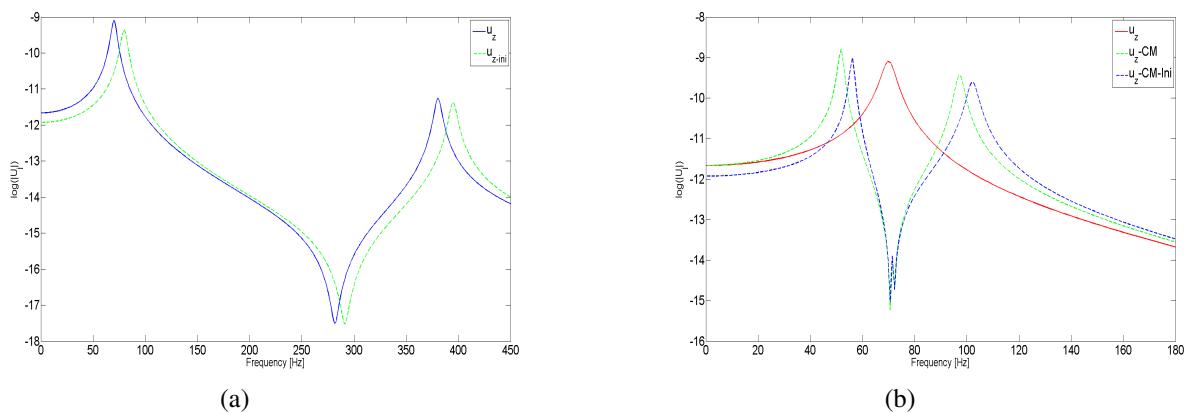


Figura 2: Respuesta dinámica de la viga FGM. (a) Corrimiento de las frecuencias de resonancia.(b) Aparición de la banda de atenuación y sustancial desplazamiento de la misma.

### 3.3. Cuantificación de incertidumbre en la respuesta dinámica

En esta sección se realiza un estudio relacionado con la propagación de incertidumbre sobre aspectos constructivos de la viga FGM y los resonadores mecánicos. Se seleccionaron tres variables aleatorias de acuerdo con las características de los resonadores y con las propiedades de la viga FGM. Las variables seleccionadas son: el coeficiente  $\alpha_j^Z$  y los módulos de elasticidad  $E_m$  y  $E_c$  que pertenecen a las propiedades gradativas de la viga. Los valores esperados para las

variables aleatorias son los siguientes:  $\mathcal{E}\{\alpha_j^Z\} = 0,4$ ,  $\mathcal{E}\{E_m\} = 70 \text{ Gpa}$ ,  $\mathcal{E}\{E_c\} = 380 \text{ Gpa}$ . Se considera que las tres variables consideradas como inciertas tienen el mismo coeficiente de variación  $\delta_{vi}$ . Se ejecutan las realizaciones de Monte Carlo y de esta manera se obtienen los gráficos de convergencia e incertidumbre. Es posible ver en la Fig. 3, una buena convergencia de manera estable a partir de las 500 iteraciones, para tres coeficientes de variación diferentes. En cambio la Fig. 4 se muestra la respuesta del modelo estocástico, donde puede apreciarse como la incertidumbre de los parámetros se propaga únicamente hacia la zona donde se genera la banda de atenuación, aumentando la dispersión con el aumento de incertidumbre paramétrica y donde, por la aparición de las tensiones iniciales, se modifica la zona de bandgap.

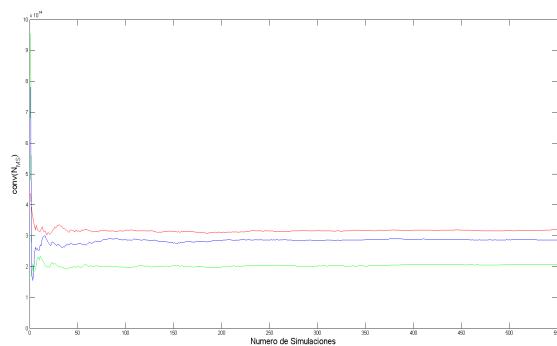


Figura 3: Convergencia para  $\delta_{vi} = 0,1$  (Rojo),  $\delta_{vi} = 0,08$  (Verde) y  $\delta_{vi} = 0,05$  (Azul).

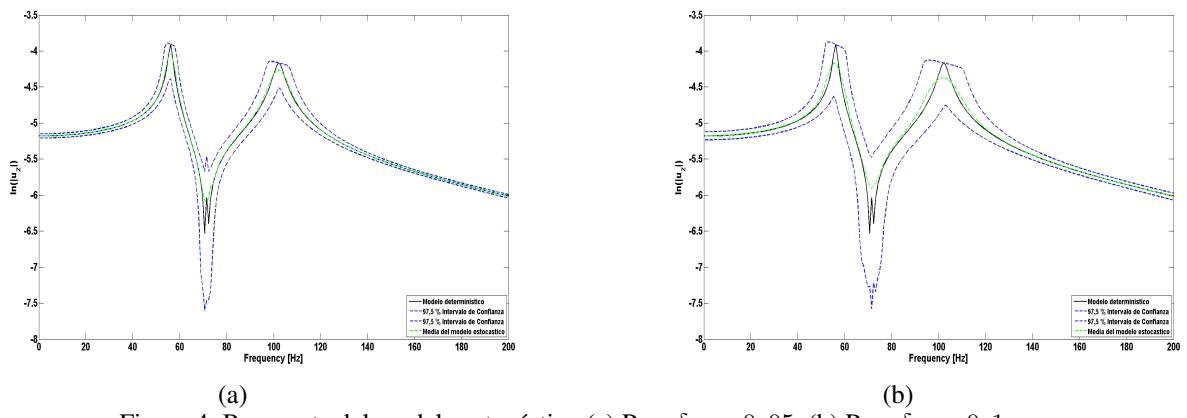


Figura 4: Respuesta del modelo estocástico (a) Para  $\delta_{vi} = 0,05$ . (b) Para  $\delta_{vi} = 0,1$ .

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un modelo de viga curva de paredes delgadas construida con materiales funcionales graduados y sección transversal simétrica, para el análisis de atenuación de vibraciones y la propagación de incertidumbre en ciertos parámetros, teniendo en cuenta la aparición de tensiones iniciales. Asimismo, se han efectuado estudios sobre la evaluación de la eficacia del diseño de la viga frente a la variación de tres variables aleatorias en el modelo estocástico y mediante la incorporación de resonadores mecánicos, a lo largo del eje  $Z$  para el modelo computacional desarrollado. Para esto, se realizó la evaluación de la robustez del elemento finito 1D desarrollado, apelando a la comparación y demostrando que, con el mismo,

se obtienen resultados más que aceptables frente a la comparación con respecto al desarrollo de otros autores. En consecuencia, se puede indicar que mediante la incorporación de los resonadores locales, se consiguió una banda de atenuación en la cual desaparece la frecuencia del sistema original. También se puede observar, como las tensiones iniciales modifican la banda de atenuación, por el desplazamiento de las frecuencias de resonancia seleccionadas, debido a la precarga incluida en el estudio. En ciertos casos este desplazamiento puede ser casi imperceptible, pero debido a la precisión necesaria en algunas aplicaciones, se necesita un diseño robusto y eficaz. Finalmente se realizó el estudio de la incertidumbre, cuyos resultados mostraron una gran sensibilidad de la respuesta a variaciones en los valores seleccionados como parámetros inciertos. A pesar de la incertidumbre en los cuatro parámetros seleccionados, se puede ver que el bandgap, tiene un pequeño desplazamiento generado por la aparición de las tensiones iniciales o de precarga. Pese a esto, se puede apreciar, que se garantiza la atenuación de la amplitud para la frecuencia seleccionada.

## REFERENCIAS

- Amir M., Kim S.W., y Talha M. Uncertain eigenvalue analysis for graded porous and sandwich arches by employing perturbation-based stochastic finite element approach. *Journal of Vibration Engineering Technologies*, 12(2):2695–2714, 2024. <https://doi.org/10.1007/s42417-023-01008-1>.
- Dwivedi A., Munian R.K., Bhattacharya B., y Adhikari S. Bandgap formation mechanism in tacticity inspired elastic mechanical metastructures. *Scientific Reports*, 14:24611, 2024. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-75462-6>.
- Kahya V. y Turan M. Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 109:108–115, 2017. ISSN 1359-8368. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.10.039>.
- Karimzadeh M., Basvoju D., Vakanski A., Charit I., Xu F., y Zhang X. Machine learning for additive manufacturing of functionally graded materials. *Materials*, 17(15), 2024. ISSN 1996-1944. <https://doi.org/10.3390/ma17153673>.
- Le Q.C. y Nguyen B.D. Two-dimensional elasticity solutions for analyzing free vibration of functionally graded porous beams. *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 12(1):235–248, 2025. ISSN 2423-4826. <https://doi.org/10.22075/macs.2024.32009.1594>.
- Li X., Li L., Hu Y., Ding Z., y Deng W. Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory. *Composite Structures*, 165:250–265, 2017. ISSN 0263-8223. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.01.032>.
- Piovan M., Domini S., y Ramirez J. In-plane and out-of-plane dynamics and buckling of functionally graded circular curved beams. *Composite Structures*, 94(11):3194–3206, 2012. ISSN 0263-8223. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.04.032>.
- Sugino C., Leadenham S., Ruzzene M., y Erturk A. On the mechanism of bandgap formation in locally resonant finite elastic metamaterials. *Journal of Applied Physics*, 120(13):134501, 2016. ISSN 0021-8979. <https://doi.org/10.1063/1.4963648>.
- Sun Y., Zheng H., y Lee H.P. Beam-type metastructure with x-shape inertial amplification mechanisms for vibration suppression. *Thin-Walled Structures*, 189:110893, 2023. ISSN 0263-8231. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110893>.
- Turan M., Uzun Yaylacı E., y Yaylacı M. Free vibration and buckling of functionally graded porous beams using analytical, finite element, and artificial neural network methods. *Archive of Applied Mechanics*, 93(4):1351–1372, 2023. <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02332-w>.