

CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL DE VIGAS DE HORMIGÓN ARMADO SOMETIDAS A FLEXIÓN SIMPLE: UNA COMPARACIÓN ENTRE MÉTODOS FORM Y MONTE CARLO

STRUCTURAL RELIABILITY OF REINFORCED CONCRETE BEAMS IN FLEXURE: A COMPARISON BETWEEN FORM AND MONTE CARLO SIMULATION

Gerardo I. Piris, Victoria M. Simón, Hermann R. Segovia, Bettina Y. Sánchez y Carlos E. Sauer

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Asunción, Campus Universitario, San Lorenzo, Paraguay, gpiris@fiuna.edu.py, <https://www.ing.una.py/FIUNA3/>

Palabras clave: Confiabilidad Estructural, Monte Carlo, FORM, Hormigón Armado.

Resumen. Este trabajo contribuye al campo de la confiabilidad estructural mediante el desarrollo de herramientas computacionales para analizar la confiabilidad de secciones de vigas de hormigón armado sometidas a flexión simple, considerando explícitamente el comportamiento estocástico de las variables y aplicándolas a diversos estudios de caso. Se emplean dos enfoques: simulación numérica (Monte Carlo) y transformación (FORM). Ambos métodos evalúan la confiabilidad de secciones rectangulares diseñadas según el código ACI-318-19. Se seleccionaron secciones representativas, considerando relaciones típicas entre cargas vivas y muertas en edificaciones. Los métodos se comparan en precisión y aplicabilidad. Además, se realiza un análisis de sensibilidad para cuantificar la influencia de las variables aleatorias en los índices de confiabilidad y las probabilidades de falla. Los métodos se aplicaron a casos que incluyen desviaciones respecto de las hipótesis de diseño, como variaciones de cargas, disminución de la resistencia de materiales y errores de armado, evaluando su impacto en la seguridad estructural.

Keywords: Structural Reliability, Monte Carlo, FORM, Reinforced Concrete.

Abstract. This study contributes to the field of structural reliability by developing computational tools for the reliability analysis of reinforced concrete beam sections subjected to simple bending, explicitly considering the stochastic behavior of the involved variables and applying them to several case studies. Two approaches are employed: a numerical simulation method (Monte Carlo) and a transformation method (FORM). Both methods are used to evaluate the reliability of rectangular cross-sections designed according to the ACI-318-19 code. Representative sections were selected, considering typical ratios of live to dead loads in building structures. The methods are compared in terms of accuracy and applicability. Furthermore, a sensitivity analysis identifies the influence of random variables on reliability indices and failure probabilities. The methods were applied to case studies involving deviations from initial design assumptions, such as variations in loads, material strength degradation, and construction inaccuracies, allowing for a detailed evaluation of their effects on structural safety.

1 INTRODUCCIÓN

En el diseño estructural, no es posible garantizar seguridad absoluta debido a diversas fuentes de incertidumbre, como la imprevisibilidad de cargas futuras, la variabilidad inherente de los materiales, las aproximaciones y simplificaciones en los modelos de comportamiento estructural, y los posibles errores humanos durante la construcción, tal como señala Beck. La confiabilidad estructural, definida como el grado de confianza en que una estructura cumplirá los requisitos de diseño durante una vida útil determinada y bajo condiciones de operación prescritas, constituye un marco racional para abordar dichas incertidumbres. Al incorporar análisis probabilísticos, permite cuantificar y limitar la probabilidad de falla a niveles aceptables.

Durante el proceso de diseño, los códigos de diseño estructural indican cómo estimar las cargas actuantes y definir los parámetros geométricos y mecánicos necesarios para garantizar el desempeño de la estructura. Estos códigos se basan principalmente en el enfoque de diseño por estados límite con factores parciales de seguridad, calibrados mediante procedimientos sustentados en la confiabilidad, que consideran el carácter estocástico de las variables involucradas. Una vez construida la estructura, es posible medir directa o indirectamente ciertos parámetros geométricos o mecánicos. Suponiendo que las características estadísticas de las demás variables permanezcan inalteradas, esta nueva información permite reevaluar la confiabilidad de la estructura durante su vida útil.

Este trabajo se centra en la confiabilidad estructural de secciones de vigas de hormigón armado sometidas a flexión simple. Se realiza un análisis comparativo entre dos métodos de evaluación de la confiabilidad: el Método de Confiabilidad de Primer Orden (FORM), basado en transformaciones, y la Simulación de Monte Carlo (MCS), un algoritmo de simulación numérica. Asimismo, se evalúan los efectos de variaciones en las cargas vivas, la degradación de la resistencia del hormigón y errores de construcción sobre la confiabilidad estructural.

2 DISEÑO POR ESTADOS LÍMITES

Los requisitos técnicos de diseño para las estructuras pueden expresarse mediante ecuaciones de estado límite. Cuando alguna de estas ecuaciones no se satisface, la estructura se considera en un estado no deseado o de falla, según lo descrito por [Ditlevsen y Madsen \(2007\)](#). Cada modo potencial de falla corresponde, por lo tanto, a una ecuación de estado límite específica. En este estudio, solo se consideran dos tipos de cargas: carga muerta y carga viva. En consecuencia, el análisis de confiabilidad se basa en una única ecuación lineal de estado límite.

$$g(\mathbf{X}) = R - (D + L_{50\text{years}}). \quad (1)$$

donde \mathbf{X} es un vector de variables aleatorias, R representa la resistencia a flexión de la sección, D es el momento flector debido a la carga muerta y $L_{50\text{years}}$ es el momento flector correspondiente a la carga viva extrema a cincuenta años. La ecuación de estado límite mencionada, define las fronteras que dividen los dominios de falla y de seguridad.

$$\begin{aligned} \Omega_f &= \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) \leq 0\} \text{ es el dominio de falla,} \\ \Omega_s &= \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) > 0\} \text{ es el dominio de seguridad.} \end{aligned} \quad (2)$$

Para este estado límite, la probabilidad de falla se evalúa como:

$$P_f = P[g(\mathbf{X}) \leq 0] = \int_{\Omega_f} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3)$$

Luego, el índice de confiabilidad β se relaciona con la probabilidad de falla por la expresión:

$$P_f = \Phi[-\beta] \quad (4)$$

3 METODOLOGÍA

El estudio constó de dos etapas. En la primera, se realizaron simulaciones exploratorias para comprender los niveles de confiabilidad alcanzables y la sensibilidad de las variables clave de diseño. Para llevar a cabo estas evaluaciones, se desarrollaron algoritmos computacionales en MATLAB tanto para el Método de Confiabilidad de Primer Orden (FORM) como para Simulaciones de Monte Carlo (MCS o SMC), lo que permitió el cálculo sistemático de los índices de confiabilidad para una amplia gama de configuraciones de vigas de hormigón armado. Estas simulaciones se basaron en un conjunto de 160 configuraciones de vigas, obtenidas al variar las secciones transversales $\{20 \times 50; 20 \times 60; 20 \times 70; 20 \times 80\}$ [cm], las cuantías de refuerzo $\rho = \{0.7; 0.9; 1.1; 1.3\}$ [%], y diez proporciones de carga viva sobre carga muerta $L/D = \{0.3; 0.4; \dots; 1.2; 1.3\}$. Se adoptaron como resistencias de diseño del hormigón y del acero, $f'_c = 24$ [MPa] y $f_y = 420$ [MPa], respectivamente. Los modelos probabilísticos para las variables se basaron en el JCSS Probabilistic Model Code (JCSS, 2001). Adicionalmente, algunos parámetros de distribución fueron extraídos de los trabajos de Nowak et al. (2003), Ellingwood y Galambos (1982) y Ellingwood et al. (1980). Estos parámetros se resumen en la Tabla 1.

Variable	Descripción	Distribución	λ	COV
R	Incertidumbre del modelo resistente	Log-normal	1.200	0.150
S	Incertidumbre del modelo solicitante	Log-normal	1.000	0.100
D	Carga muerta	Normal	1.050	0.100
L	Carga viva	Gumbel	1.000	0.250
f'_c	Resistencia característica del hormigón	Normal	1.235	0.145
f_y	Tensión de fluencia del acero	Normal	1.145	0.050
b	Ancho	Normal	1.010	0.040
d	Canto útil	Normal	0.990	0.040

Tabla 1: Parámetros estadísticos de las variables aleatorias.

En la segunda etapa, se analizaron tres casos de estudio:

- Caso 1: Incremento de la carga viva por encima de la proyectada originalmente.
- Caso 2: Disminución de la resistencia del hormigón constatada en la estructura ya construida.
- Caso 3: Errores en el armado (ej., barras faltantes, recubrimiento reducido).

Para cada caso, el índice de confiabilidad β fue calculado tanto con FORM como MCS.

4 RESULTADOS

4.1 Comparación entre FORM y MCS

La comparación entre los índices de confiabilidad de FORM y MCS muestra que ambos métodos produjeron resultados altamente consistentes, con valores promedio de 3.66 y 3.63, respectivamente, y coeficientes de variación idénticos (0.17). Los índices oscilaron entre 3.96 - 3.39 para (FORM) y 3.96 - 3.37 para (MCS), correspondiendo a probabilidades de falla del orden de 10^{-4} (4×10^{-5} a 3×10^{-4}), consistentes con el nivel de confiabilidad objetivo de $\beta=3.5$ usado en la calibración del código de diseño por Nowak et al. (2003). Aunque FORM tendió a arrojar valores ligeramente superiores, las diferencias fueron insignificantes más allá de la segunda cifra decimal, lo que hace que ambos enfoques sean equivalentes para aplicaciones prácticas de ingeniería.

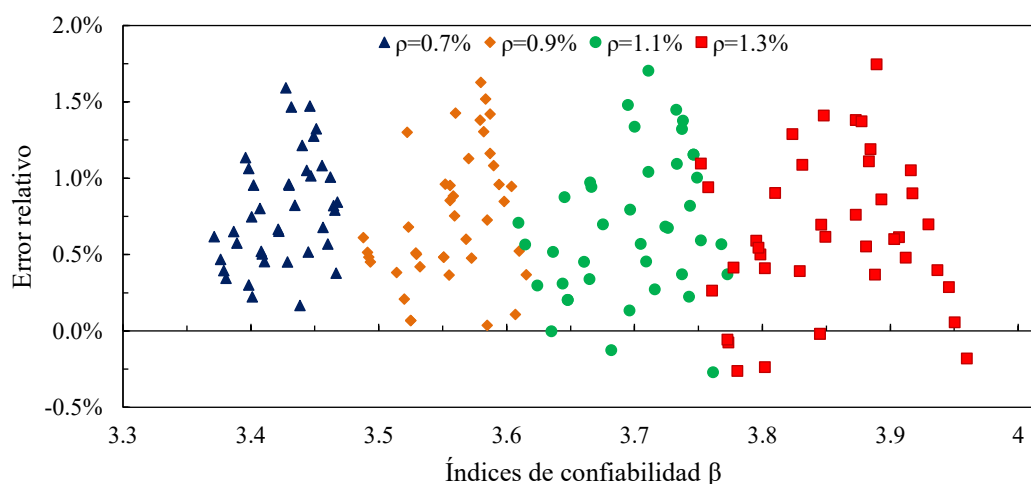


Figura 1: Comparación de índices de confiabilidad obtenidos mediante FORM respecto a MCS.

La Figura 1 muestra los errores relativos de los resultados de FORM, tomando a MCS como referencia. Los errores exhiben una distribución aproximadamente normal, con una media de $\mu = 0.0071$ y una desviación estándar de $\sigma = 0.0044$. Las vigas con cuantías más altas tienden a presentar índices de confiabilidad más elevados y una dispersión ligeramente mayor.

4.2 Análisis de sensibilidad

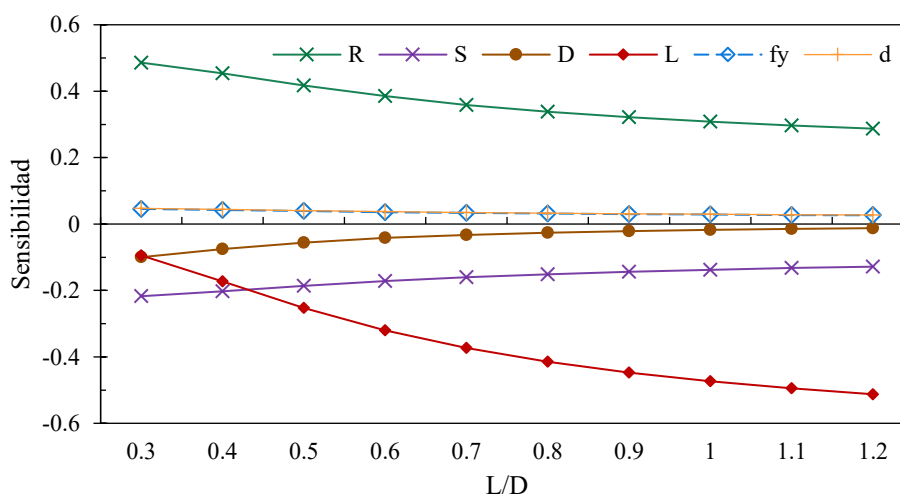


Figura 2: Coeficientes de sensibilidad de las variables más influyentes (α^2)

El método FORM fue utilizado para calcular los coeficientes de sensibilidad (α^2), los cuales cuantifican la influencia relativa de las incertidumbres de cada variable en la ecuación de estado límite. Variables como la resistencia característica del hormigón (f'_c), el ancho de la viga (b) y el área de acero de refuerzo (A_s) mostraron coeficientes de sensibilidad insignificantes ($\alpha^2 < 0.01$) y fueron excluidas de la Figura 2. El análisis reveló un cambio en las incertidumbres dominantes en función de la proporción L/D . Para valores bajos de L/D , las incertidumbres del modelo—particularmente aquellas relacionadas con la resistencia—fueron las más influyentes. A medida que la razón L/D aumentó, la influencia de la incertidumbre de la carga viva se volvió dominante. La tensión de fluencia del acero (f_y) y canto útil (d) exhibieron una sensibilidad aproximadamente constante, independientemente de la proporción L/D .

4.3 Caso de estudio 1: Incremento de la carga viva

En el caso de estudio 1 se evaluó el impacto de un incremento de la carga viva en un conjunto de 20 vigas. Los resultados, presentados en la [Figura 3](#), muestran una disminución continua del índice de confiabilidad a medida que la carga viva aumenta. El valor umbral β_s (para estructuras existentes con consecuencias de falla muy bajas) se cruza cuando la carga viva alcanza aproximadamente el 200% de su valor de proyecto original. Alrededor del 600%, el índice de confiabilidad se aproxima a cero, lo que indica una probabilidad de falla del 50%.

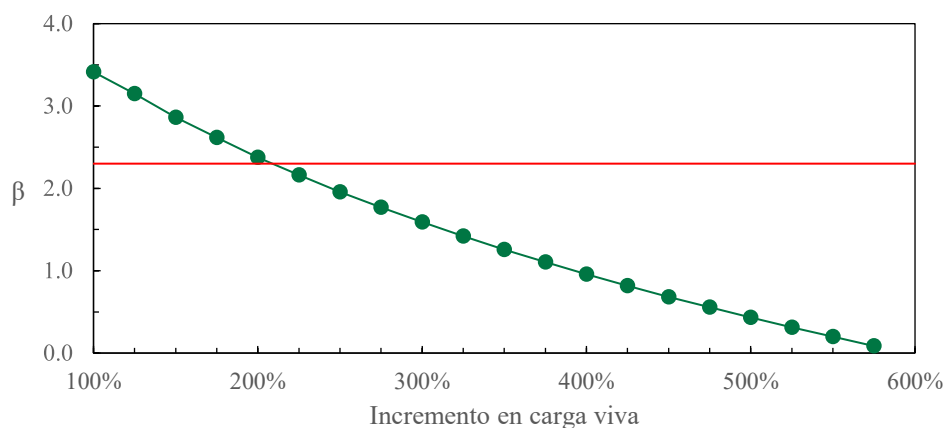


Figura 3: Índices de confiabilidad ante incremento de carga viva - Caso de Estudio 1

4.4 Caso de estudio 2: Resistencia reducida del hormigón

La [Figura 4](#) muestra que para valores de f'_c superiores a 14 MPa (60% del valor de proyecto original), el índice de confiabilidad se mantiene por encima de 3 con un descenso gradual. Por debajo de este umbral, β disminuye abruptamente, acercándose a cero a medida que f'_c se aproxima a 5 MPa. Este comportamiento se explica por el creciente solapamiento entre las distribuciones estadísticas del momento resistente (M_r) y el momento solicitante (M_s) a medida que disminuye la resistencia a compresión del hormigón. Inicialmente, pequeñas reducciones en f'_c desplazan ligeramente la distribución de M_r hacia la izquierda, pero el solapamiento con M_s sigue siendo mínimo y no afecta significativamente la confiabilidad. No obstante, a medida que los valores medios de M_r y M_s se aproximan, este solapamiento aumenta.

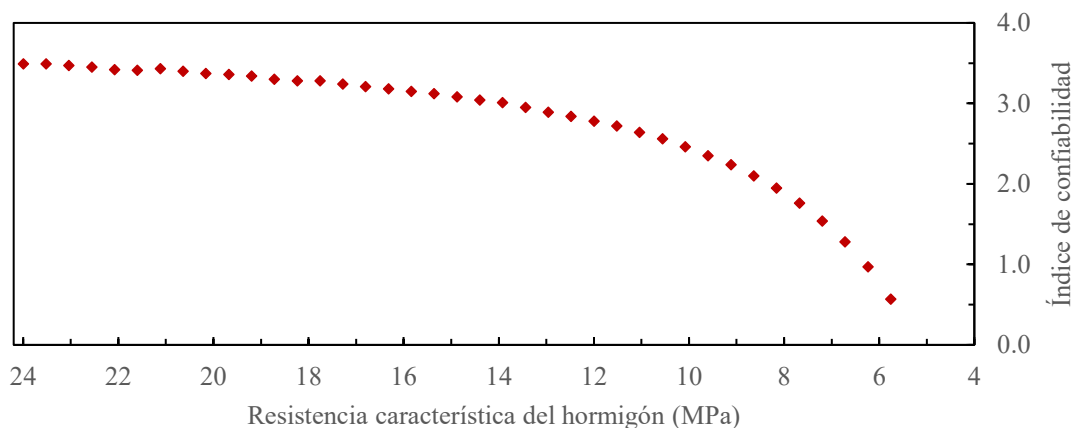


Figura 4: Índices de confiabilidad para valores decrecientes de f'_c

4.5 Caso de estudio 3: Errores humanos en el armado

En este caso se analizaron cinco vigas de hormigón armado con errores constructivos típicos. La viga 1, diseñada según la normativa ACI 318-19, alcanzó un índice de confiabilidad de . A la viga 2 se le descontó una de las barras de la capa superior ($\beta=3.63$), mientras que a la viga 3 se le descontó una de la capa inferior ($\beta=3.55$). En la viga 4 se utilizaron barras de diámetro inferior, lo que disminuyó la confiabilidad significativamente hasta $\beta=1.88$. La viga 5 presentaba un recubrimiento reducido de 1 cm, lo que resultó en $\beta=4.34$ (sin considerar los efectos de la durabilidad a largo plazo). Los resultados indican que pequeños errores de armado, como la falta de una barra, reducen la confiabilidad de manera moderada, mientras que el uso de diámetros incorrectos puede afectar críticamente la seguridad estructural. Un recubrimiento reducido puede incrementar inicialmente la confiabilidad debido a un mayor canto útil, pero podría comprometer la durabilidad con el tiempo

5 CONCLUSIONES

Se observó que las vigas con mayor cuantía de refuerzo presentaron índices de confiabilidad superiores. La comparación entre los métodos FORM y Monte Carlo (MCS) mostró excelente concordancia, con diferencias insignificantes en los valores usuales de confiabilidad. Para confiabilidades extremadamente bajas, MCS resultó más preciso debido a que su exactitud aumentó con el número de eventos de falla, requiriéndose un menor número de simulaciones. Para confiabilidades muy altas, FORM fue más eficiente al reducir el error sin incrementar el costo computacional. En general, FORM tendió a proporcionar índices ligeramente superiores, pero estas diferencias fueron despreciables para aplicaciones prácticas en los rangos habituales de confiabilidad estructural.

El análisis de sensibilidad indicó que las incertidumbres asociadas a f'_c , b , A_s , f_y y d tuvieron influencia mínima en la confiabilidad estructural. Para bajas proporciones L/D , las incertidumbres en los modelos de resistencia predominaron, mientras que para proporciones altas las cargas vivas se volvieron más relevantes. Las variables f_y y d mostraron un efecto constante e independiente de L/D .

REFERENCIAS

- Beck, A., Confiabilidade e Segurança das Estruturas. São Paulo: Elsevier, 2019.
- Ditlevsen, O., y Madsen, H.O., Structural Reliability Methods. Chichester: Wiley, 2007.
- Ellingwood, B., y Galambos, T., Probability-based criteria for structural design. Structural Safety, 1(1):15–26, 1982. [http://doi.org/10.1016/0167-4730\(82\)90012-1](http://doi.org/10.1016/0167-4730(82)90012-1)
- Ellingwood, B., Galambos, T., MacGregor, J., y Cornell, A., Development of a Probability Based Load Criterion for American National Standard A58: Building Code Requirements for Minimum Design Loads in Buildings and Other Structures. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1980. <http://doi.org/10.6028/NBS.SP.577>
- Joint Committee on Structural Safety (JCSS), Probabilistic Model Code: Part 1 – Basis of Design. JCSS, 2001.
- Nowak, A.S., y Szerszen, M.M., Calibration of design code for buildings (ACI 318): Part 2—Reliability analysis and resistance factors. ACI Structural Journal, 100(3):383–391, 2003. <http://doi.org/10.14359/12614>