Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XLII, pp. 1491-1498
A. Caggiano, G. Etse, P. Folino, M. Goldschmit, M. Pucheta, M. Storti (Eds.)
J. Álvarez Hostos, E.S. Esteban, G. Umbricht, C. Venier (Issue eds.)
Buenos Aires, November 11-14, 2025

SOLUCIÓN EXPLÍCITA PARA UN PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES CON CONDICIÓN DE ROBIN EN EL BORDE FIJO Y UNA FUENTE DE CALOR EXPONENCIAL DE TIPO SIMILARIDAD

EXPLICIT SOLUTION TO A TWO-PHASE STEFAN PROBLEM WITH A ROBIN CONDITION AT THE FIXED FACE AND A SIMILARITY-TYPE EXPONENTIAL HEAT SOURCE

Julieta Bollati[a,b], **María F. Natale**[a], **José A. Semitiel**[a] **y Domingo A. Tarzia**[a,b]

[a] *Departamento de Matemática, Universidad Austral, Paraguay 1950, Rosario, S2000FZF, Argentina*

[b] *CONICET, Argentina*

Palabras clave: Problema de Stefan, Condición convectiva, Fuente de calor, Solución de tipo similaridad.

Resumen. Este trabajo aborda un problema unidimensional de tipo Stefan a dos fases en un dominio semi-infinito, que modela la fusión de un material sometido a una condición de frontera convectiva (tipo Robin) en el borde fijo y a una fuente de calor interna de tipo exponencial. Esta formulación permite representar de manera realista el intercambio térmico con el entorno, incorporando un mecanismo de calentamiento adicional a través de una fuente dependiente de una variable de similaridad. Dicha fuente, de tipo exponencial autosimilar, facilita la obtención de soluciones analíticas.

Se establece la existencia y unicidad de soluciones de tipo similaridad bajo ciertas condiciones sobre los parámetros del problema. Como aplicación, se presenta un ejemplo computacional que simula la fusión de parafina, mostrando buena concordancia con el comportamiento físico esperado.

Keywords: Stefan problem, Convective boundary condition, Heat source, Similarity-type solution.

Abstract. We consider a one-dimensional two-phase Stefan problem in a semi-infinite domain, modeling the melting of a material imposing a convective (Robin-type) boundary condition at the fixed face and to an internal exponential-type heat source. This formulation realistically represents thermal exchange with the environment, incorporating an additional heating mechanism through a source depending on a similarity variable. The exponential self-similar structure of the source allows for the derivation of analytical solutions.

Existence and uniqueness of similarity-type solutions are established under certain conditions on the problem parameters. As an application, a computational example simulating paraffin melting is presented, showing good agreement with the expected physical behavior.

Copyright © 2025 Asociación Argentina de Mecánica Computacional
ISSN: 2591-3522 DOI: 10.70567/mc.v42.ocsid8419
OPEN ACCESS

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de Stefan son un área de estudio relevante debido a su aparición en diversos contextos importantes de la física, la ingeniería y la industria. Son esenciales para comprender los fenómenos de transición de fase, especialmente en situaciones que involucran transferencia de calor y procesos de solidificación o fusión (Alexiades y Solomon (1993); Crank (1984); Gupta (2018); Lunardini (1991); Rubinstein (1971)). El objetivo de los problemas de Stefan es describir las fases líquida y sólida de un material que experimenta un cambio de fase y determinar la ubicación de la interfaz que separa estas fases, conocida como frontera libre.

En los problemas de Stefan, que modelan procesos de cambio de fase como la fusión, las condiciones de contorno juegan un papel fundamental en la determinación de la evolución de la temperatura y de la frontera libre. Una condición particularmente importante desde el punto de vista físico es la condición convectiva, también conocida como condición de tipo Robin. Esta condición describe situaciones en las que el flujo de calor en la frontera es proporcional a la diferencia entre la temperatura del material y la temperatura del entorno, representando así un mecanismo de intercambio térmico con un medio ambiente, es decir:

$$k\frac{\partial \Phi}{\partial x}(0,t) = H(t)\left(\Phi(0,t) - B_\infty\right),$$

donde Φ es la temperatura del material, k es la conductividad térmica, $H(t)$ caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo y B_∞ representa la temperatura ambiente en $x = 0$. Este tipo de condiciones ha sido ampliamente estudiada en distintos contextos Bougoffa y Khanfer (2021),Briozzo y Natale (2019), Venturato et al. (2024), lo que evidencia su relevancia. En este trabajo se considera el proceso de fusión de un material semi-infinito cuando se impone una condición convectiva en el borde fijo $x = 0$ de la forma $H(t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}}$, con $h_0 > 0$.

Los problemas de Stefan con fuentes de calor internas surgen en la modelización de procesos de cambio de fase en los cuales, además del mecanismo clásico de conducción de calor, se considera la generación o absorción de energía dentro del material. Estas fuentes pueden representar efectos de calentamiento o enfriamiento volumétrico debidos a procesos físicos, químicos o biológicos. La inclusión de fuentes internas añade complejidad a la formulación matemática y a la solución del problema, ya que afecta tanto la distribución de temperatura en ambas fases como la evolución de la frontera libre. En este contexto, diversos trabajos han abordado el análisis de problemas de Stefan a dos fases con fuentes internas, estableciendo resultados de existencia y unicidad de soluciones tipo similaridad, así como el estudio del comportamiento asintótico de la frontera libre bajo distintas condiciones de contorno, Bollati et al. (2022), Briozzo et al. (2007), McCord et al. (2016), Scott (1994).

En este trabajo, se realiza un estudio de un problema de Stefan unidimensional a dos fases para la fusión de un material homogéneo semi-infinito ($x \geq 0$) con una fuente de calor en cada fase, donde se impone una condición convectiva o de tipo Robin en el borde fijo $x = 0$.

El propósito es determinar la distribución de la temperatura:

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \Phi_2(x,t) & \text{si} \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\ \Phi_1(x,t) & \text{si} \quad s(t) < x, \qquad\quad t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

y la frontera libre $x = s(t)$, $t > 0$ que separa la fase sólida de la fase líquida. Una descripción

Copyright © 2025 Asociación Argentina de Mecánica Computacional

matemática del modelo está dada por:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho c_2} g_2(x,t), \qquad 0 < x < s(t),\ t > 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho c_1} g_1(x,t), \qquad x > s(t),\ t > 0, \tag{3}$$

$$\Phi_1(x,0) = -C < 0, \qquad x > 0, \tag{4}$$

$$\Phi_1(+\infty,t) = -C < 0, \qquad t > 0. \tag{5}$$

$$k_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(0,t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}} \left(\Phi_2(0,t) - B_\infty\right), \qquad t > 0, \tag{6}$$

$$k_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(s(t),t) - k_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(s(t),t) = \rho \ell \dot{s}(t), \qquad t > 0, \tag{7}$$

$$\Phi_1(s(t),t) = \Phi_2(s(t),t) = 0, \qquad t > 0, \tag{8}$$

$$s(0) = 0, \tag{9}$$

para dos fuentes de calor internas dadas por:

$$g_i(x,t) = (-1)^{i+1} \tfrac{\rho \ell}{t} \exp\left\{ -\left(\tfrac{x}{2a_i\sqrt{t}} + d_i \right)^2 \right\}, \quad i = 1,2, \tag{10}$$

donde las constantes positivas $a_i^2 = \frac{k_i}{\rho c_i}$ y c_i representan el coeficiente de difusión térmica y el calor específico, respectivamente, para las fases $i = 1$ (región sólida) y $i = 2$ (región líquida), $d_i > 0$, $i = 1,2$, $\ell > 0$ es el calor latente por unidad de masa, $\rho > 0$ es la densidad de masa común a ambas fases, $h_0 > 0$ es el coeficiente que caracteriza la tranferencia de calor en el borde fijo $x = 0$ y $B_\infty > 0$ es la temperatura ambiente.

El tipo de término fuente de calor dado por (10) es importante debido al uso de energía de microondas, según lo indicado en Scott (1994).

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 se presenta la equivalencia del problema (2)-(9) con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando el método de similaridad. La Sección 3 está orientada a la demostración de la existencia y unicidad de solución bajo ciertas hipótesis sobre los datos del problema. Asimismo, se presenta un ejemplo computacional que ilustra la aplicabilidad del modelo al caso de la fusión de la parafina. Finalmente, la Sección 4 expone las conclusiones principales del trabajo.

2. TRANSFORMACIÓN Y EQUIVALENCIA DEL PROBLEMA

En esta sección se prueba la existencia de solución de tipo similaridad del problema de Stefan (2)-(9) y bajo ciertas hipótesis sobre los datos iniciales del problema, se demuestra unicidad de solución.

Aplicando el método de inmobilización del dominio, se buscan soluciones del tipo

$$\Phi_i(x,t) = \theta_i(\omega), \quad i = 1,2, \tag{11}$$

donde la nueva variable ω es definida por

$$\omega = \frac{x}{s(t)}. \tag{12}$$

Entonces, la condición (7) se transforma en

$$k_1 \theta_1'(1) - k_2 \theta_2'(1) = \rho \ell s(t) \dot{s}(t), \tag{13}$$

Copyright © 2025 Asociación Argentina de Mecánica Computacional

y necesariamente $s(t)\dot{s}(t) = cte.$, es decir, la frontera libre toma la forma:

$$s(t) = 2a_2\lambda\sqrt{t}, \quad t > 0, \tag{14}$$

donde el parámetro adimensional $\lambda > 0$ que caracteriza a la frontera libre es desconocido.

Luego, se define

$$y_i(\eta) = \theta_i\left(\frac{\eta}{\lambda}\right), \quad i = 1, 2, \tag{15}$$

donde $\eta = \lambda\omega$ es la variable de similaridad.

Así, se obtiene inmediatamente el siguiente teorema que establece la equivalencia entre el problema (2)-(9) con dos problemas diferenciales ordinarios acoplados:

Teorema 1 *El problema de Stefan definido por* (2)-(9) *tiene una solución de tipo similaridad* (Φ, s) *dada por:*

$$\Phi_2(x,t) = y_2\left(\tfrac{\lambda x}{s(t)}\right), \qquad 0 < x < s(t),\ t > 0, \tag{16}$$

$$\Phi_1(x,t) = y_1\left(\tfrac{\lambda x}{s(t)}\right), \qquad x > s(t),\ t > 0, \tag{17}$$

$$s(t) = 2a_2\lambda\sqrt{t}, \qquad t > 0, \tag{18}$$

si y solo si las funciones $y_1 = y_1(\eta) \in C^2(\lambda, +\infty)$, $y_2 = y_2(\eta) \in C^2(0, \lambda)$ *y el parámetro* $\lambda > 0$ *satisfacen los siguientes problemas diferenciales ordinarios:*

$$y_2'' + 2\eta y_2' = \frac{4\ell}{c_2}\exp\left(-(\eta + d_2)^2\right), \qquad 0 < \eta < \lambda, \tag{19}$$

$$y_2(\lambda) = 0, \tag{20}$$

$$k_2 y_2'(0) = 2a_2 h_0\left(y_2(0) - B_\infty\right), \tag{21}$$

y

$$y_1'' + 2\frac{a_2^2}{a_1^2}\eta y_1' = -\frac{4a_2^2\ell}{a_1^2 c_1}\exp\left(-(\tfrac{a_2}{a_1}\eta + d_1)^2\right), \qquad \eta > \lambda, \tag{22}$$

$$y_1(\lambda) = 0, \tag{23}$$

$$y_1(+\infty) = -C, \tag{24}$$

acoplados por la siguiente condición:

$$k_1 y_1'(\lambda) - k_2 y_2'(\lambda) = 2\rho a_2^2 \ell\lambda. \tag{25}$$

3. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN

Se probará a continuación que el problema diferencial ordinario (19)-(25) tiene única solución.

Teorema 2 *Si*

$$\text{Ste}_1 \geq \frac{\sqrt{\pi}}{d_1\exp(d_1^2)}\left(1 - \exp(d_1^2)\text{erfc}(d_1)\right), \tag{26}$$

y

$$h_0 > h_2 := \tfrac{k_2}{a_2\text{Ste}_2}\left(\text{Ste}_1 - \tfrac{\sqrt{\pi}}{d_1\exp(d_1^2)}\left(1 - \exp(d_1^2)\text{erfc}(d_1)\right)\right), \tag{27}$$

Copyright © 2025 Asociación Argentina de Mecánica Computacional

entonces el problema (19)-(25) *tiene por solución a*

$$y_2(\eta) = \varphi_2(\eta) + \Psi_{2,h_0}(\eta), \qquad 0 < \eta < \lambda, \tag{28}$$
$$y_1(\eta) = \varphi_1(\eta) + \Psi_1(\eta), \qquad \eta > \lambda, \tag{29}$$

siendo λ *la única solución de la ecuación*

$$G_{h_0}(z) = \frac{\mathrm{Ste}_2}{\sqrt{\pi}}, \quad z > 0, \tag{30}$$

donde

$$\varphi_2(\eta) = -\tfrac{\ell\sqrt{\pi}}{d_2 c_2}\left(\mathrm{erf}(\eta + d_2) - \mathrm{erf}(d_2) - \tfrac{\mathrm{erf}(\eta)}{\exp(d_2^2)}\right), \tag{31}$$

$$\Psi_{2,h_0}(\eta) = \frac{B_\infty\sqrt{\pi}(\mathrm{erf}(\lambda)-\mathrm{erf}(\eta)) - \varphi_2(\lambda)\left(\frac{k_2}{a_2 h_0} + \sqrt{\pi}\mathrm{erf}(\eta)\right)}{\frac{k_2}{a_2 h_0} + \sqrt{\pi}\mathrm{erf}(\lambda)}, \tag{32}$$

$$\varphi_1(\eta) = \frac{\ell\sqrt{\pi}}{c_1 d_1}\left[\frac{\mathrm{erf}\left(\frac{a_2\lambda}{a_1}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{a_2\eta}{a_1}\right)}{\exp\left(\frac{2a_2\lambda d_1}{a_1} + d_1^2\right)} + \mathrm{erf}\left(\frac{a_2\eta}{a_1} + d_1\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{a_2\lambda}{a_1} + d_1\right)\right], \tag{33}$$

$$\Psi_1(\eta) = -\frac{C + \varphi_1(+\infty)}{\mathrm{erfc}\left(\frac{a_2\lambda}{a_1}\right)}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{a_2\eta}{a_1}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{a_2\lambda}{a_1}\right)\right), \tag{34}$$

$$\varphi_1(+\infty) = \tfrac{\ell\sqrt{\pi}}{c_1 d_1}\left[\mathrm{erfc}\left(\frac{a_2\lambda}{a_1} + d_1\right) - \frac{\mathrm{erfc}\left(\frac{a_2\lambda}{a_1}\right)}{\exp\left(d_1^2 + \frac{2a_2\lambda d_1}{a_1}\right)}\right], \tag{35}$$

$$G_{h_0}(z) = \frac{F_{0,h_0}(z)h_1(z)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}z\right)} + \widetilde{F}_{0,h_0}(z), \tag{36}$$

$$F_{0,h_0}(z) = \left(\frac{k_2}{a_2\sqrt{\pi}h_0} + \mathrm{erf}(z)\right) z\exp\left(z^2\right), \tag{37}$$

$$h_1(z) = \mathrm{Ste}_1 + \tfrac{\sqrt{\pi}}{d_1}\left[\mathrm{erfc}\left(\frac{a_2}{a_1}z + d_1\right) - \frac{\mathrm{erfc}\left(\frac{a_2}{a_1}z\right)}{\exp\left(d_1^2 + \frac{2a_2 d_1}{a_1}z\right)}\right], \tag{38}$$

$$Q(z) = \sqrt{\pi}\, z\exp\left(z^2\right)\mathrm{erfc}(z), \tag{39}$$

$$\widetilde{F}_{0,h_0}(z) = F_{0,h_0}(z) + \tfrac{\mathrm{erf}(z+d_2)-\mathrm{erf}(d_2)}{d_2} + \tfrac{k_2(1-\exp(-2d_2 z))}{a_2 d_2 h_0\sqrt{\pi}\exp\left(d_2^2\right)} - \tfrac{\exp\left(-d_2^2 - 2d_2 z\right)\mathrm{erf}(z)}{d_2}, \tag{40}$$

siendo $\mathrm{Ste}_1 = \frac{c_1\, C}{\ell}$ *y* $\mathrm{Ste}_2 = \frac{c_2\, B_\infty}{\ell}$ *los números de Stefan.*

Demostración. La función definida por

$$F_0(z) = z\mathrm{erf}(z)\exp\left(z^2\right), \quad z > 0, \tag{41}$$

es estrictamente creciente y verifica $F_0(0) = 0$ y $F_0(+\infty) = +\infty$. Luego, la función F_{0,h_0} dada por (37) puede expresarse como

$$F_{0,h_0}(z) = \frac{k_2}{a_2\sqrt{\pi}h_0} z\exp\left(z^2\right) + F_0(z), \qquad z > 0.$$

Copyright © 2025 Asociación Argentina de Mecánica Computacional

Dicha función es estrictamente creciente y satisface $F_{0,h_0}(0) = 0$ y $F_{0,h_0}(+\infty) = +\infty$.

Por otro lado, teniendo en cuenta la hipótesis (26), resulta que la función h_1 definida por (38) es positiva y estrictamente creciente para todo $z > 0$ y satisface $h_1(0) \geq 0$ y $h_1(+\infty) = \mathrm{Ste}_1$.

También, por Gonzalez y Tarzia (1996), se tiene que la función Q definida por (39) es estrictamente creciente para todo $z > 0$ y verifica $Q(0) = 0$, $Q(+\infty) = 1$ y $Q'(0) = \sqrt{\pi}$.

La función G_{h_0} dada por (36) puede reescribirse como

$$G_{h_0}(z) = W(z)\left(\tfrac{k_2}{a_2 h_0\sqrt{\pi}} + \mathrm{erf}(z)\right) h_1(z) + \widetilde{F}_{0,h_0}(z), \tag{42}$$

donde

$$W(z) = \frac{z\exp(z^2)}{Q\left(\frac{a_2}{a_1}z\right)}, \quad z > 0. \tag{43}$$

Luego

$$\begin{aligned} G'_{h_0}(z) &= W'(z)\left(\tfrac{k_2}{a_2 h_0\sqrt{\pi}} + \mathrm{erf}(z)\right) h_1(z) \\ &\quad + W(z)\left[\left(\tfrac{k_2}{a_2 h_0\sqrt{\pi}} + \mathrm{erf}(z)\right) h_1(z)\right]' + \widetilde{F}'_{0,h_0}(z), \end{aligned} \tag{44}$$

con $W'(z) > 0$ para todo $z > 0$.

Además, la función $\widetilde{F}_{0,h_0}$ definida por (40) cumple con las siguientes propiedades

$$\widetilde{F}_{0,h_0}(0) = F_{0,h_0}(0) = 0, \quad \widetilde{F}_{0,h_0}(+\infty) = +\infty$$

y $\widetilde{F}_{0,h_0}$ es estrictamente creciente para todo $z > 0$.

De todo la anterior, la función G_{h_0} es estrictamente creciente para todo $z > 0$ y satisface

$$G_{h_0}(0) \geq 0, \quad G_{h_0}(+\infty) = +\infty.$$

Finalmente, por hipótesis (27), se tiene que $G_{h_0}(0) < \frac{\mathrm{Ste}_2}{\sqrt{\pi}}$ lo que garantiza la existencia de una única solución $\lambda > 0$ de la ecuación (30).

□

De los teoremas 1 y 2 sigue inmediatamente que

Teorema 3 *Si se verifican las hipótesis* (26) *y* (27)*, entonces el problema de Stefan definido por* (2)-(9) *tiene una única solución de tipo similaridad, la cual está dada por* (16)-(18)*, donde* y_2 *y* y_1 *están determinadas por* (28) *y* (29)*, respectivamente, y* $\lambda > 0$ *es la única solución de la ecuación* (30).

Observación 1 *Si la hipótesis* (26) *no se cumple, se puede garantizar la existencia de una solución para el problema de Stefan* (2)-(9).

Ejemplo 1 *Se presenta un ejemplo computacional para ilustrar la aplicabilidad del problema de Stefan a dos fases, considerando una condición convectiva impuesta en el borde fijo* $x = 0$*, tal como se analiza en el Teorema 2. El ejemplo considera la fusión de la parafina, asumiendo propiedades térmicas constantes, las cuales se detallan en la Tabla 1.*

Si la temperatura inicial es $-C = -250$ K *y la temperatura ambiente es* $B_\infty = 300$ *K, si se consideran los datos proporcionados en la Tabla 1 y las definiciones de difusividad térmica*

Copyright © 2025 Asociación Argentina de Mecánica Computacional

Fase	Conductividad térmica k_i (W/m·K)	Calor específico c_i (J/kg·K)	Calor latente ℓ (J/kg)	Densidad ρ (kg/m^3)
$i = 1$	$0,2$	2200	200000	800
$i = 2$	$0,4$	2200	200000	800

Tabla 1: Coeficientes térmicos de la parafina en la fases sólida $i = 1$ y líquida $i = 2$.

Difusividad térmica fase 1 a_1^2 (m^2/s)	Difusividad térmica fase 2 a_2^2 (m^2/s)	Ste$_1$ –	Ste$_2$ –
$1,13 \times 10^{-7}$	$2,27 \times 10^{-7}$	$2,75$	$3,3$

Tabla 2: Parámetros deducidos de la Tabla 1.

Caso	d_1 –	d_2 –	h_2 Hip. (27) (kg /Ks$^{5/2}$)	h_0 (kg/Ks$^{5/2}$)	λ_j –
1	$0,1$	$0,05$	$237,224$	$240,224$	$0,0921568$
2	$1,5$	0,05	$677,723$	680,723	$0,1943095$
3	$0,1$	2	$237,224$	$240,224$	$0,1306197$
4	$1,5$	2	$677,723$	$680,723$	$0,2475820$

Tabla 3: Valores de los coeficientes λ_j que caracterizan a las fronteras libre $x = s_j(t)$ para los casos $j = 1, 2, 3, 4$.

$a_i^2 = \frac{k_i}{\rho c_i}$ *($i = 1, 2$) y de los números de Stefan* Ste$_1$ *y* Ste$_2$ *definidos en el Teorema 2, se derivan los parámetros listados en la Tabla 2.*

Teniendo en cuenta los coeficientes térmicos obtenidos en la Tabla 1 y los parámetros deducidos en la Tabla 2, en la Tabla 3 se obtiene la única solución de la ecuación (30) *que caracteriza a la frontera libre del problema* (2)-(9) *para cuatro casos diferentes (*$j = 1, 2, 3, 4$*) de las constantes positivas* d_1 *y* d_2*.*

Observación 2 *Se puede estudiar el comportamiento asintónico cuando* $h_0 \to \infty$*, obteniendo que la solución del problema* (2)-(9) *converge a la solución del problema* (2)-(5), (7)-(9) *imponiendo la condición de temperatura* $\Phi_2(0, t) = B_\infty$ *con* $t > 0$ *en el borde fijo* $x = 0$.

4. CONCLUSIONES

Este trabajo ha propuesto un modelo unidimensional para describir el proceso de fusión de un material en un dominio semi-infinito, bajo una condición convectiva en la frontera fija y la influencia de una fuente de calor interna de tipo exponencial. Se ha demostrado la existencia y unicidad de solución de tipo similaridad bajo ciertas condiciones sobre los datos del problema. Además, se presentó un ejemplo computacional que ilustra la aplicabilidad del modelo al proceso de fusión de la parafina, validando su utilidad en contextos reales y proporcionando una herramienta eficaz para simular estos fenómenos.

En general, los resultados obtenidos no solo aportan al estudio teórico de los problemas de cambio de fase, sino que también abren la puerta a futuras aplicaciones prácticas en la ingeniería y la física, particularmente en procesos que involucren materiales con características térmicas complejas y condiciones de contorno variables.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento parcial de los proyectos 006-25CI2002 y PIP-CONICET 11220220100532CO, Universidad Austral, Rosario, Argentina.

Copyright © 2025 Asociación Argentina de Mecánica Computacional

REFERENCIAS

Alexiades V. y Solomon A. *Mathematical modeling of melting and freezing processes*. Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1993. http://doi.org/10.1115/1.2930032.

Bollati J., Natale M., Semitiel J., y Tarzia D. Exact solution for non-classical one-phase Stefan problem with variable thermal coefficients and two different heat source terms. *Computational and Applied Mathematics*, 41:375, 2022. http://doi.org/10.1007/s40314-022-02095-8.

Bougoffa L. y Khanfer A. Solutions of a non-classical stefan problem with nonlinear thermal coefficients and a robin boundary condition. *AIMS Mathematics*, 6(6):6569–6579, 2021. http://doi.org/10.3934/math.2021387.

Briozzo A. y Natale M. Non-classical stefan problem with nonlinear thermal coefficients and a robin boundary condition. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 49:159–168, 2019. http://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2019.03.002.

Briozzo A., Natale M., y Tarzia D. Explicit solutions for a two-phase unidimensional Lamé-Clapeyron-Stefan problem with source terms in both phases. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 329:145–162, 2007. http://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.05.083.

Crank J. *Free and moving boundary problems*. Clarendon Press, Oxford, 1984.

Gonzalez A. y Tarzia D. Determination of unknown coefficients of a semi-infinite material through a simple mushy zone model for two-phase stefan problem. *International Journal of Engineering Science*, 34(7):799–817, 1996. http://doi.org/10.1016/0020-7225(95)00107-7.

Gupta S. *The classical Stefan problem. Basic concepts, modelling and analysis*. Elsevier, Amsterdam, 2018.

Lunardini V. *Heat transfer with freezing and thawing*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1991.

McCord M.W., Crepeau J.C., Siahpush A., y Ferres-Brogin Z. Analytical solutions to the Stefan problem with internal heat generation. *Applied Thermal Engineering*, 103:443–451, 2016. http://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2016.03.122.

Rubinstein L. *The Stefan problem*. American Mathematical Society, Providence, 1971.

Scott E. An analytical solution and sensitivity study of sublimation-dehydration within a porous medium with volumetric heating. *Journal of Heat Transfer*, 116:686–693, 1994. http://doi.org/10.1115/1.2910923.

Venturato L., Cirelli M., y Tarzia D. Explicit solutions related to the Rubinstein binary-alloy solidification problem with a heat flux or a convective condition at the fixed face. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 47:6770–6788, 2024. http://doi.org/10.1002/mma.9187.

Copyright © 2025 Asociación Argentina de Mecánica Computacional