

UN PROBLEMA DE STEFAN MULTIFASE CON CONDICIÓN CONVECTIVA EN EL BORDE FIJO

A MULTIPHASE STEFAN PROBLEM WITH A CONVECTIVE BOUNDARY CONDITION AT THE FIXED FACE

Julietta Bollati^{a,b}, María F. Natale^a, José A. Semitiel^a y Domingo A. Tarzia^{a,b}

^a*Departamento de Matemática, Universidad Austral, Paraguay 1950, Rosario, S2000FZF, Argentina*

^b*CONICET, Argentina*

Palabras clave: Problema de Stefan a n fases, Condición convectiva, Solución de tipo similitud, Comportamiento asintótico.

Resumen. Se considera un problema unidimensional de Stefan multifase que modela los cambios de fase de un material semi-infinito, bajo una condición convectiva o de tipo Robin en el borde fijo. Se establecen condiciones suficientes sobre el parámetro que caracteriza la transferencia de calor en este borde para garantizar la existencia y unicidad de solución de tipo similitud. En el caso en que dicho parámetro tiende a infinito, la solución de este problema converge a la del caso con condición de tipo Dirichlet en el borde fijo.

Keywords: n -phase Stefan problem, Convective boundary condition, Similarity-type solution, Asymptotic behaviour.

Abstract. A one-dimensional multiphase Stefan problem is considered, modeling the phase-change of a semi-infinite material under a convective or a Robin-type boundary condition at the fixed face. Sufficient conditions are established on the parameter characterizing the heat transfer at this boundary to guarantee the existence and uniqueness of a similarity-type solution. In the case where this parameter goes to infinity, the solution of this problem converges to that of the case with a Dirichlet-type condition at the fixed face.

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de Stefan son un área de estudio relevante debido a su aparición en diversos contextos importantes de la física, la ingeniería y la industria. Son esenciales para comprender los fenómenos de transición de fase, especialmente en situaciones que involucran transferencia de calor y procesos de solidificación o fusión. El objetivo de los problemas de Stefan es describir las fases de un material que experimenta un cambio de fase y determinar la ubicación de la o las interfaces que separan a dichas regiones, conocidas como fronteras libres.

Algunas de las aplicaciones de los problemas de tipo Stefan incluyen la solidificación de aleaciones binarias como por ejemplo en [Brosa Planella et al. \(2021\)](#); [Rubinstein \(1971\)](#); [Solomon et al. \(1982\)](#); [Venturato et al. \(2024\)](#), la colada continua del acero en [Belhamadia et al. \(2023\)](#) y la criopreservación de células en [Dalwadi et al. \(2020\)](#). Existen numerosas aplicaciones de procesos de cambio de fase que pueden consultarse en libros como [Alexiades y Solomon \(1993\)](#); [Crank \(1984\)](#); [Gupta \(2018\)](#); [Koga y Krstic \(2020\)](#); [Lunardini \(1991\)](#); [Perez \(2020\)](#); [Szekely y Themelis \(1971\)](#); [Visintin \(1996\)](#).

En los problemas de Stefan, que modelan procesos de cambio de fase como la fusión, las condiciones de contorno juegan un papel fundamental en la determinación de la evolución de la temperatura y de la frontera libre. Una condición particularmente importante desde el punto de vista físico es la condición convectiva, también conocida como condición de tipo Robin. Esta condición describe situaciones en las que el flujo de calor en el borde fijo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del material en el borde fijo y la temperatura del entorno:

$$k \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = H(t) (\theta(0, t) - \theta_{\infty}),$$

donde $\theta = \theta(x, t)$ es la temperatura del material, k es la conductividad térmica, $H(t)$ caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo y $\theta_{\infty} > 0$ representa la temperatura ambiente. En este trabajo se considera el proceso de fusión de un material semi-infinito cuando se impone una condición convectiva en el borde fijo $x = 0$ de la forma $H(t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}}$, con $h_0 > 0$. En contraste con las condiciones de tipo Dirichlet (temperatura prescrita) o Neumann (flujo prescrito), la condición convectiva proporciona un modelo más realista en numerosos contextos físicos e ingenieriles, como en la solidificación de metales o el enfriamiento de materiales sometidos a un ambiente con convección forzada.

Un problema de Stefan a n fases es una generalización del clásico problema de Stefan a dos fases. En lugar de considerar solo dos fases (sólido y líquido), el problema a n fases considera múltiples transiciones de fase sucesivas, típicamente en medios con varias fases térmicas o materiales con distintos puntos de cambio de fase como puede verse en [Wilson \(1978\)](#), [Sanziel y Tarzia \(1989\)](#) y en [Panov \(2025\)](#).

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2 se formula un problema de Stefan unidimensional a n fases para la fusión de un material homogéneo semi-infinito $x \geq 0$, donde se impone una condición convectiva o de tipo Robin en el borde fijo $x = 0$. Inicialmente, en el tiempo $t = 0$, el material se encuentra en estado sólido como se observa en la Figura 1. A partir de un instante $t > 0$, la distribución de la temperatura en cada región es como se muestra en la Figura 2 donde $x = s_i(t)$ con $i = 1, 2, \dots, n - 1$ son las fronteras libres que separan las n regiones. En la Sección 3 se demuestra la existencia y unicidad de la solución bajo ciertas hipótesis sobre los datos del problema. Finalmente, en la Sección 4 se exponen las conclusiones principales del trabajo.



Figura 1: Perfil de temperatura en la región sólida.

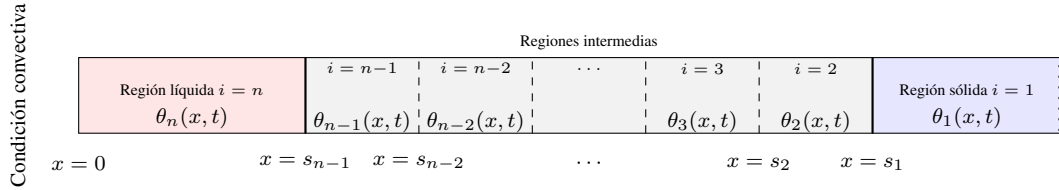


Figura 2: Distribución espacial por regiones: líquida, intermedias y sólida.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El propósito es determinar la distribución de la temperatura:

$$\theta(x, t) = \begin{cases} \theta_n(x, t) & \text{si } s_n(t) = 0 < x < s_{n-1}(t), & t > 0, \\ \theta_{n-1}(x, t) & \text{si } s_{n-1}(t) < x < s_{n-2}(t), & t > 0, \\ \vdots & \\ \theta_2(x, t) & \text{si } s_2(t) < x < s_1(t), & t > 0, \\ \theta_1(x, t) & \text{si } s_1(t) < x < s_0(t) = +\infty, & t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

y las fronteras libres $x = s_i(t)$, $t > 0$ que separan la fase i de la fase $i + 1$ con $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Una descripción matemática del modelo está representada por:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t}(x, t) = \alpha_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2}(x, t), \quad s_i(t) < x < s_{i-1}(t), \quad t > 0, \quad (2)$$

donde $\alpha_i = \frac{k_i}{\rho c_i} > 0$ representa el coeficiente de difusión térmica siendo c_i y k_i el calor específico y la conductividad térmica, respectivamente en la fase i con $i = 1, 2, \dots, n$ y $\rho > 0$ es la densidad de masa común a las n fases. Además, se consideran $s_0(t) \equiv +\infty$ y $s_n(t) \equiv 0$ para todo $t > 0$.

La temperatura inicial ($t = 0$) y la temperatura cuando $x \rightarrow +\infty$, se asumen constantes:

$$\theta_1(x, 0) = \tilde{\theta}_1, \quad x > 0, \quad (3)$$

$$\theta_1(+\infty, t) = \tilde{\theta}_1, \quad t > 0. \quad (4)$$

En el borde fijo $x = 0$ se impone una condición convectiva o de tipo Robin:

$$k_n \frac{\partial \theta_n}{\partial x}(0, t) = \frac{h_0}{\sqrt{t}} \left(\theta_n(0, t) - \tilde{\theta}_\infty \right), \quad t > 0, \quad (5)$$

donde $h_0 > 0$ es el coeficiente que caracteriza la transferencia de calor en el borde fijo $x = 0$ y $\tilde{\theta}_\infty$ es la temperatura ambiente.

Las condiciones de cambio de fase sobre las fronteras libres $x = s_i(t)$ se obtienen mediante un balance energético (condiciones de Stefan):

$$k_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x}(s_i(t), t) - k_{i+1} \frac{\partial \theta_{i+1}}{\partial x}(s_i(t), t) = \delta_i \dot{s}_i(t), \quad t > 0, \quad (6)$$

donde $\delta_i > 0$ representa el calor latente por unidad de volumen necesario para pasar de la fase i a la fase $i + 1$ y las condiciones de temperatura en las fronteras libres se asumen constantes:

$$\theta_i(s_i(t), t) = \theta_{i+1}(s_{i+1}(t), t) = \tilde{\theta}_{i+1}, \quad t > 0, \quad (7)$$

con $i = 1, \dots, n - 1$ y verifican la relación:

$$\tilde{\theta}_1 < \tilde{\theta}_2 < \dots < \tilde{\theta}_n < \tilde{\theta}_\infty. \quad (8)$$

Además, las posiciones iniciales de las fronteras libres son

$$s_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (9)$$

La Figura 3 es una representación esquemática del problema de Stefan a n fases a resolver.

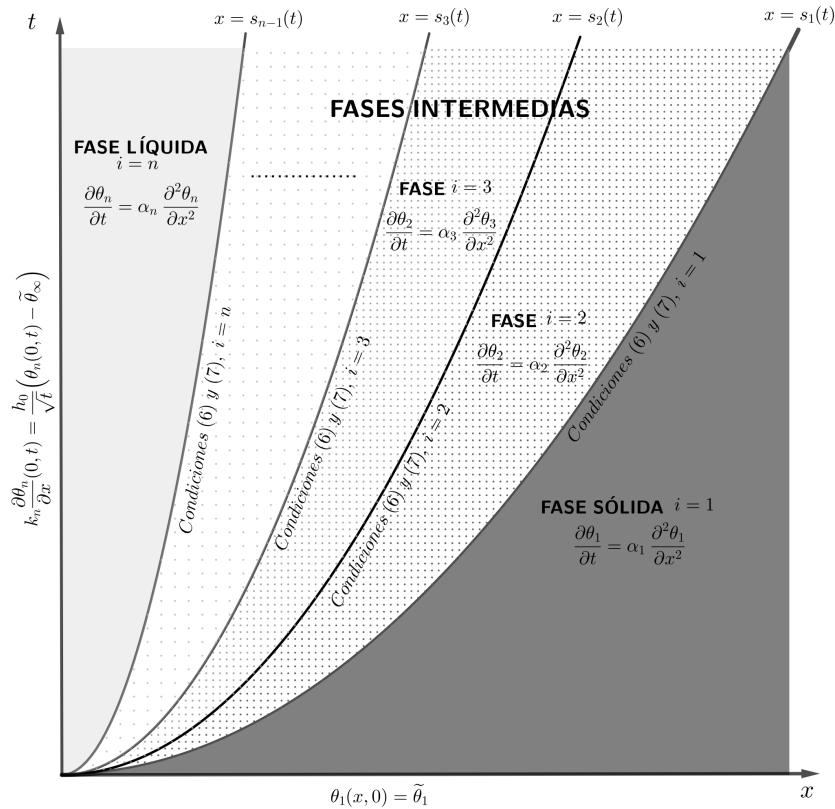


Figura 3: Problema de Stefan a n fases con condición convectiva en el borde fijo

3. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN

En esta sección se prueba la existencia y unicidad de solución de tipo similaridad del problema de Stefan multifase (2)-(9) bajo ciertas hipótesis sobre los datos iniciales. Siguiendo las

ideas de [Sanziel y Tarzia \(1989\)](#) y [Wilson \(1978\)](#), se propone una solución de similaridad de la forma:

$$\theta_i(x, t) = A_i + B_i \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a_i \sqrt{t}} \right), \quad s_i(t) < x < s_{i-1}(t), \quad t > 0, \quad (10)$$

$$s_i(t) = 2\omega_i \sqrt{t}, \quad t > 0, \quad (11)$$

donde $a_i = \sqrt{\alpha_i}$. Las constantes A_i y B_i deben determinarse para cada $i = 1, 2, \dots, n$, como también los parámetros $\omega_i > 0$ que caracterizan las fronteras libres $x = s_i(t)$ con $i = 1, 2, \dots, n-1$.

De las condiciones (3)-(7), se obtiene:

$$A_i = \frac{\tilde{\theta}_{i+1} \operatorname{erf} \left(\frac{\omega_{i-1}}{a_i} \right) - \tilde{\theta}_i \operatorname{erf} \left(\frac{\omega_i}{a_i} \right)}{\operatorname{erf} \left(\frac{\omega_{i-1}}{a_i} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\omega_i}{a_i} \right)}, \quad B_i = \frac{\tilde{\theta}_i - \tilde{\theta}_{i+1}}{\operatorname{erf} \left(\frac{\omega_{i-1}}{a_i} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\omega_i}{a_i} \right)}, \quad (12)$$

con $i = 1, 2, \dots, n-1$, y

$$A_n = \frac{\tilde{\theta}_n + \frac{\tilde{\theta}_\infty h_0 a_n \sqrt{\pi}}{k_n} \operatorname{erf} \left(\frac{\omega_{n-1}}{a_n} \right)}{1 + \frac{a_n h_0 \sqrt{\pi}}{k_n} \operatorname{erf} \left(\frac{\omega_{n-1}}{a_n} \right)}, \quad B_n = \frac{\tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}_\infty}{\frac{k_n}{a_n h_0 \sqrt{\pi}} + \operatorname{erf} \left(\frac{\omega_{n-1}}{a_n} \right)}, \quad (13)$$

donde se introduce un parámetro ficticio $\omega_0 = +\infty$.

La condición (7), para $i = 1, 2, \dots, n-1$, se satisface si y solo si $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1})$ es solución del sistema de $(n-1)$ ecuaciones con $(n-1)$ incógnitas z_1, z_2, \dots, z_{n-1} :

$$-\beta_i \frac{\eta(z_i, a_i)}{\phi(z_{i-1}, z_i, a_i)} + \beta_{i+1} \frac{\eta(z_i, a_{i+1})}{\phi(z_i, z_{i+1}, a_i)} = \delta_i z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-2, \quad (14)$$

$$-\beta_{n-1} \frac{\eta(z_{n-1}, a_{n-1})}{\phi(z_{n-2}, z_{n-1}, a_{n-1})} + \frac{\beta_n \eta(z_{n-1}, a_n)}{\frac{k_n}{a_n h_0 \sqrt{\pi}} + \operatorname{erf} \left(\frac{z_{n-1}}{a_n} \right)} = \delta_{n-1} z_{n-1}, \quad (15)$$

donde

$$\beta_i = \frac{k_i}{a_i \sqrt{\pi}} (\tilde{\theta}_{i+1} - \tilde{\theta}_i) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (16)$$

$$\beta_n = \frac{k_n}{a_n \sqrt{\pi}} (\tilde{\theta}_\infty - \tilde{\theta}_n) > 0, \quad (17)$$

$$\eta(z, a) = \exp \left(-\frac{z^2}{a^2} \right), \quad z > 0, \quad a > 0, \quad (18)$$

$$\phi(z, w, y) = \operatorname{erf} \left(\frac{z}{y} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{w}{y} \right), \quad z > 0, \quad w > 0, \quad y > 0. \quad (19)$$

Para demostrar la existencia de solución del sistema (14)-(15), se definen las funciones:

$$G_1(z) = z, \quad z > 0, \quad (20)$$

$$h_1(z) = \delta_1 z + \beta_1 \frac{\eta(z, a_1)}{\operatorname{erfc} \left(\frac{z}{a_1} \right)}, \quad z > 0. \quad (21)$$

Teniendo en cuenta que la función $F_1(z) = \frac{\exp(-z^2)}{\operatorname{erfc}(z)}$, $z > 0$ es una función estrictamente creciente, se sigue que la función h_1 verifica:

$$h_1(0) = \beta_1 > 0, \quad h_1(+\infty) = +\infty, \quad h_1'(z) > 0, \quad \forall z > 0,$$

entonces la ecuación (14) para $i = 1$ es

$$h_1(z_1) = \beta_2 \frac{\eta(z_1, a_2)}{\phi(z_1, z_2, a_2)} \quad (22)$$

y por lo tanto $\phi(z_1, z_2, a_2) > 0$ y $z_1 > z_2$.

Sea ahora la función definida por

$$H_1(z) = \operatorname{erf}\left(\frac{z}{a_2}\right) - \beta_2 \frac{\eta(z, a_2)}{h_1(z)}, \quad z > 0. \quad (23)$$

Por las propiedades de la función h_1 , resulta que H_1 satisface:

$$H_1(0) = -\frac{\beta_2}{\beta_1} < 0, \quad H_1(+\infty) = 1, \quad H_1'(z) > 0, \quad \forall z > 0.$$

Luego, se deduce que existe $\xi_1 > 0$ tal que $H_1(\xi_1) = 0$ y por lo tanto es posible definir la función:

$$G_2(z) = a_2 \operatorname{erf}^{-1}(H_1(z)), \quad z \in (\xi_1, +\infty) \quad (24)$$

la cual es una función estrictamente creciente y verifica $G_2(\xi_1) = 0$ y $G_2(+\infty) = +\infty$.

La igualdad (22) puede reescribirse como

$$\frac{\beta_2}{\phi(z_1, z_2, a_2)} = \frac{h_1(z_1)}{\eta(z_1, a_2)}, \quad (25)$$

y teniendo en cuenta la función dada en (24), se obtiene

$$z_2 = G_2(z_1). \quad (26)$$

Dado que $G_2(z) < G_1(z)$ para todo $z \in (\xi_1, +\infty)$, siguiendo las ideas de [Wilson \(1978\)](#) y [Sanziel y Tarzia \(1989\)](#), y procediendo inductivamente, se definen las siguientes funciones:

$$h_i(z) = \delta_i G_i(z) + \beta_i \frac{\eta(G_i(z), a_i)}{\phi(G_{i-1}(z), G_i(z), a_i)}, \quad z \in (\xi_{i-1}, +\infty), \quad i = 2, \dots, n-2, \quad (27)$$

$$h_{n-1}(z) = \delta_{n-1} G_{n-1}(z) + h_{n-2}(z) \frac{\eta(G_{n-1}(z), a_{n-1})}{\eta(G_{n-2}(z), a_{n-1})}, \quad z \in (\xi_{n-2}, +\infty), \quad (28)$$

$$H_i(z) = \operatorname{erf}\left(\frac{G_i(z)}{a_{i+1}}\right) - \beta_i \frac{\eta(G_i(z), a_{i+1})}{h_i(z)}, \quad z \in (\xi_{i-1}, +\infty), \quad i = 2, \dots, n-2, \quad (29)$$

$$G_i(z) = a_i \operatorname{erf}^{-1}(H_{i-1}(z)), \quad z \in (\xi_{i-1}, +\infty), \quad i = 3, \dots, n-1, \quad (30)$$

donde

$$\xi_i > \xi_{i-1} / H_i(\xi_i) = 0, \quad i = 2, \dots, n. \quad (31)$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\beta_i}{\phi(G_{i-1}(z), G_i(z), a_i)} = \frac{h_{i-1}(z)}{\eta(G_{i-1}(z), a_i)}, \quad i = 3, \dots, n-1, \quad (32)$$

resulta que $G_{i-1}(z) > G_i(z)$ para todo $z \in (\xi_{i-1}, +\infty)$ y por lo tanto las funciones definidas por (27)-(30) son estrictamente crecientes y satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} h_i(\xi_{i-1}) &> 0, & h_i(+\infty) &= +\infty, \\ H_i(\xi_{i-1}) &< 0, & H_i(\xi_i) &= 0, & H_i(+\infty) &= 1, \\ G_i(\xi_{i-1}) &= 0, & G_i(+\infty) &= +\infty. \end{aligned}$$

Por otro lado, la función definida por

$$K_{h_0}(z) = \beta_n \frac{\eta(G_{n-1}(z), a_n)}{\frac{k_n}{a_n h_0 \sqrt{\pi}} + \operatorname{erf}\left(\frac{G_{n-1}(z)}{a_n}\right)}, \quad z \in (\xi_{n-2}, +\infty), \quad (33)$$

verifica las siguientes propiedades:

$$K_{h_0}(\xi_{n-2}) = \frac{\beta_n h_0 a_n \sqrt{\pi}}{k_n} > 0, \quad K_{h_0}(+\infty) = 0, \quad K'_{h_0}(z) < 0, \quad \forall z > \xi_{n-2}.$$

Luego, de (28), (30) y (33), el sistema (14)-(15), puede reescribirse como:

$$z_i = G_i(z_1), \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (34)$$

$$h_{n-1}(z_1) = K_{h_0}(z_1). \quad (35)$$

Así, la ecuación (35) tiene una única solución $z_1 = \omega_1$ si $K_{h_0}(\xi_{n-2}) > h_{n-1}(\xi_{n-2})$ y por lo tanto, el sistema (14)-(15) tiene una única solución $z_i = \omega_i$ con $i = 1, 2, \dots, n-1$ si

$$h_0 > \frac{k_n^2 a_{n-1}}{a_n^2 k_{n-1} \sqrt{\pi}} \frac{\tilde{\theta}_\infty - \tilde{\theta}_n}{\tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}_{n-1}} \frac{1}{H_{n-3}(\xi_{n-2})}. \quad (36)$$

Observación 1 Se puede estudiar el comportamiento asintótico si el coeficiente h_0 , que caracteriza el flujo de calor en el borde fijo $x = 0$, tiende a infinito, obteniéndose que la solución del problema de Stefan a n fases con condición de tipo Robin en $x = 0$ dado por (2)–(9) converge a la única solución del problema de Stefan a n fases definido por (2)-(4) y (6)-(9), imponiendo una condición de tipo Dirichlet en el borde fijo, $\theta_n(0, t) = \tilde{\theta}_\infty$ con $t > 0$.

4. CONCLUSIONES

Se ha considerado un problema unidimensional de Stefan multifase que describe el cambio de fase de un material semi-infinito, bajo una condición de contorno convectiva en el borde fijo. Se han establecido condiciones suficientes sobre el parámetro de transferencia de calor en dicha frontera que garantizan la existencia de una única solución de tipo similaridad. Además, se ha demostrado que, cuando este parámetro tiende a infinito, la solución del problema con condición convectiva converge a la solución del problema asociado con condición de temperatura prescrita en el borde fijo.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha recibido financiamiento parcial de los proyectos 006-25CI2002 y PIP-CONICET 11220220100532CO, Universidad Austral, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

- Alexiades V. y Solomon A. *Mathematical modeling of melting and freezing processes*. Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1993. <http://doi.org/10.1115/1.2930032>.
- Belhamadia Y., Cassol G., y Dubljevic S. Numerical modelling of hyperbolic phase change problems: Application to continuous casting. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 209:124042, 2023. <http://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124042>.
- Brosa Planella F., Please C., y Van Gorder R. Extended Stefan problem for the solidification of binary alloys in a sphere. *European Journal of Applied Mathematics*, 32(2):242–279, 2021. <http://doi.org/10.1017/S095679252000011X>.

- Crank J. *Free and moving boundary problems*. Clarendon Press, Oxford, 1984.
- Dalwadi M., Waters S., Byrne H., y Hewitt I. A mathematical framework for developing freezing protocols in the cryopreservation of cells. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 80:667–689, 2020. <http://doi.org/10.1137/19M1275875>.
- Gupta S. *The classical Stefan problem. Basic concepts, modelling and analysis*. Elsevier, Amsterdam, 2018.
- Koga S. y Krstic M. *Materials Phase Change PDE Control & Estimation*. Birkhäuser Springer, 2020. <http://doi.org/10.1007/978-3-030-58490-0>.
- Lunardini V. *Heat transfer with freezing and thawing*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1991.
- Panov E. On self-similar solutions of a multi-phase Stefan problem in the half-line. *Journal of Mathematical Sciences*, 287:620–629, 2025. <http://doi.org/10.1007/s10958-025-07627-1>.
- Perez N. *Phase Transformation in Metals. Mathematics, Theory and Practice*. Springer, 2020. <http://doi.org/10.1007/978-3-030-49168-0>.
- Rubinstein L. *The Stefan problem*. American Mathematical Society, Providence, 1971.
- Sanziel M. y Tarzia D. Necessary and sufficient condition to obtain n phases in a one-dimensional medium with a flux condition on the fixed face. *Mathematicae Notae*, 33:25–32, 1989.
- Solomon A., Wilson D., y Alexiades V. A mushy zone model with an exact solution. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 9:319–324, 1982. [http://doi.org/10.1016/0094-4548\(82\)90040-6](http://doi.org/10.1016/0094-4548(82)90040-6).
- Szekely J. y Themelis N. *Rate phenomena in Process Metallurgy*. John Wiley & Sons, Inc., 1971.
- Venturato L., Cirelli M., y Tarzia D. Explicit solutions related to the Rubinstein binary-alloy solidification problem with a heat flux or a convective condition at the fixed face. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 47:6770–6788, 2024. <http://doi.org/10.1002/mma.9187>.
- Visintin A. *Models of Phase Transitions*. Birkhäuser, 1996. <http://doi.org/10.1007/978-1-4612-4078-5>.
- Wilson D. Existence and uniqueness for similarity solutions of one dimensional multiphase Stefan problems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 35:135–147, 1978. <http://doi.org/10.1137/0135012>.