

ESTRATEGIA DE REGULARIZACIÓN PARA LA ESTIMACIÓN DE LA FUENTE TÉRMICA EN PROCESOS BIDIMENSIONALES DE TRANSFERENCIA DE CALOR

REGULARIZATION STRATEGY FOR ESTIMATING THE HEAT SOURCE IN TWO-DIMENSIONAL HEAT TRANSFER PROCESSES

Diana Rubio^a, Guillermo F. Umbrecht^b, Marcela Morvidone^a y Rosa Piotrkowski^{a,c}

^aITECA (UNSAM-CONICET), ECyT, Centro de Matemática Aplicada, Univ. Nac. de San Martín, 1650 Buenos Aires, Argentina. drubio@unsam.edu.ar; mmorvidone@unsam.edu.ar; rosap@unsam.edu.ar

^bLIDTUA, Facultad de Ingeniería, Univ. Austral, M. Acosta 1611, Pilar, 1629 Buenos Aires, Argentina.
GUmbrecht@austral.edu.ar

^cFacultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Av. Paseo Colón 850, 1063 CABA, Argentina.

Palabras clave: BEMD, Transferencia de calor, Estimación de la fuente, Regularización.

Resumen. En este trabajo se estudia una técnica para la estimación del término fuente en una ecuación bidimensional de reacción-advección-difusión-fuente. La identificación de este término constituye un problema inverso mal planteado en el sentido de Hadamard, dado que el operador inverso no es acotado, lo que provoca una alta sensibilidad frente a perturbaciones en los datos. Se propone una estrategia de regularización basada en la Descomposición Modal Empírica Bidimensional (BEMD) para atenuar la variabilidad no deseada, inducida por el ruido presente en las mediciones experimentales o simuladas. Se presenta un ejemplo numérico que ilustra la efectividad de la metodología propuesta, y se comparan los resultados obtenidos con los reportados en la literatura, en los que se emplean otras técnicas de regularización clásicas. Además, se realiza un análisis sobre las distribuciones y las propiedades estadísticas de los errores relativos de aproximación, a fin de evaluar la robustez y estabilidad del enfoque desarrollado.

Keywords: BEMD, Heat transfer, Source estimation, Regularization.

Abstract. In this work, a technique is studied for estimating the source term in a two-dimensional reaction–advection–diffusion–source equation. The identification of this term constitutes an ill-posed inverse problem in the sense of Hadamard, since the associated inverse operator is unbounded, which leads to high sensitivity to perturbations in the data. To address this difficulty, a regularization strategy based on the Bidimensional Empirical Mode Decomposition (BEMD) is proposed, aimed at mitigating the undesired variability induced by noise present in experimental or simulated measurements. A numerical example is presented to illustrate the effectiveness of the proposed methodology, and the obtained results are compared with those reported in the literature, where other classical regularization techniques are employed. In addition, a detailed analysis is carried out on the error distributions and the statistical properties of the approximation relative errors, in order to assess the robustness and stability of the developed approach.

1. INTRODUCCIÓN

El problema de estimación de fuentes en sistemas de transporte modelados por ecuaciones diferenciales parabólicas constituye un problema inverso mal planteado, dado que la solución no depende de manera continua de los datos. En ([Umbrecht, 2021](#); [Umbrecht y Rubio, 2024](#)), los autores estudian el caso particular de la estimación de un término fuente en una ecuación parabólica lineal n -dimensional, utilizando datos de entrada que dependen del espacio. Allí se aborda la identificación de un término fuente independiente del tiempo en una ecuación evolutiva parabólica lineal, a partir de mediciones dependientes de la variable espacial o datos ruidosos medidos en un tiempo determinado, elegido de forma arbitraria. En este problema, pequeñas perturbaciones en los datos, especialmente en sus componentes de alta frecuencia, pueden generar errores significativos en la solución. En ([Umbrecht y Rubio, 2024](#)) se proponen tres familias uniparamétricas de operadores de regularización, diseñadas para contrarrestar la inestabilidad del operador inverso. Las estrategias presentadas allí generalizan metodologías desarrolladas por otros autores (ver, por ejemplo, ([Li et al., 2012](#); [Yang y Fu, 2014](#))), pero a diferencia de esas, se formulan en el marco de la teoría de operadores, dando lugar a aplicaciones en contextos y problemas más generales.

En este trabajo se propone un enfoque diferente que consiste en regularizar la fuente estimada mediante la Descomposición Modal Empírica Bidimensional (BEMD) ([Nunes et al., 2003](#); [Painam y Manikandan, 2023](#); [Rubio et al., 2024](#); [Morvidone et al., 2024](#)), que generaliza el método propuesto en [Huang et al. \(1998\)](#) para series temporales. Esta técnica constituye un análisis no lineal de una función de dos variables reales, $f(x, y)$, que no requiere una base predefinida: las componentes, llamadas modos, se obtienen empíricamente a partir de los datos mediante un algoritmo que se adapta localmente a las características de la función, captando su estructura en múltiples escalas. Los modos son generados en orden creciente de escala, de modo que las componentes de alta frecuencia, generalmente asociadas a ruido, quedan concentradas en los primeros modos. El desafío consiste en determinar cuántos modos deben considerarse atribuibles al ruido, de forma tal que la suma de los modos remanentes proporcione una estimación regularizada de la fuente. Los operadores de regularización mencionados previamente han demostrado ser eficaces para la estimación de fuentes a partir de datos ruidosos, en el marco de una ecuación diferencial parabólica lineal utilizada para modelar fenómenos de transporte de calor, masa o información. Los resultados obtenidos mediante BEMD se comparan con los de aquellos enfoques previos considerando ejemplos con fuentes diferenciables y no diferenciables. Aquí se presentan los resultados para una fuente no diferenciable. Se evalúan los errores globales y se caracterizan estadísticamente los errores de estimación tanto a nivel global, utilizando normas, como a nivel local, utilizando distribución estadística de errores y entropía de imágenes. Los errores relativos globales de las diferentes regularizaciones fueron evaluados con la norma de Frobenius. Esta norma es la generalmente usada para cuantificar errores ([Cortinovis y Kressner, 2020](#); [González y Suárez, 2013](#)). Se define como la raíz cuadrada de la suma cuadrática de todos los errores individuales de los elementos de la matriz; equivale a la norma euclídea de un vector y tiene significado físico dado que los elementos de la matriz se refieren a errores de medición o determinación. La distribución espacial de los errores se caracteriza con la entropía de Shannon, siguiendo los resultados de trabajos anteriores donde se determinaron, en imágenes, la textura global ([Sponring, 1996](#)), y local ([Liu et al., 2014](#)).

El objetivo de este trabajo es analizar la eficacia del método de regularización que se propone, basado en BEMD. Para ilustrar el desempeño de la regularización propuesta, y con el fin de comparar los resultados con los obtenidos con operadores de regularización introducidos en

[Umbrecht y Rubio \(2024\)](#), se considera el ejemplo de una función no-diferenciable analizada en dicho trabajo, para la cual ya se han calculado los errores de aproximación.

2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA

El problema de estimación de la fuente que consideramos consiste en estimar la función f de la siguiente ecuación bidimensional de difusión-advección-reacción (ADR) con fuente:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) = \alpha^2 \Delta u(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla(u(\boldsymbol{x}, t)) - \nu u(\boldsymbol{x}, t) + f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad (1)$$

donde $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot, t), f(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\alpha^2, \nu \in \mathbb{R}^+$, Δ, ∇ denotan el operador laplaciano y el operador gradiente, respectivamente, y “ \cdot ” representa el producto interno en \mathbb{R}^2 . Sin pérdida de generalidad, se considera condición inicial nula, es decir,

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (2)$$

El término fuente f con la condición (2), se obtiene a partir de datos ruidosos g_δ experimentales o simulados numéricamente en un instante $t_0 \in \mathbb{R}^+$,

$$g_\delta(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}, t_0) + \epsilon_\delta, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (3)$$

donde ϵ_δ representa el ruido de medición. Se supone que los datos, para un nivel de ruido δ , satisfacen

$$\|g - g_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \delta, \quad 0 < \delta < \delta_M, \quad (4)$$

siendo $\delta_M \in \mathbb{R}^+$ el máximo nivel de ruido tolerado y $g(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}, t_0)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$.

En [Umbrecht y Rubio \(2024\)](#) los autores encontraron la expresión para el operador inverso, usando técnicas de Fourier, y demostraron que el problema de estimación de la fuente (1)-(4) es un problema inverso inestable frente a errores en los datos, lo que lleva a un problema inverso mal planteado en sentido de Hadamard ([Hadamard, 1924](#)). Esto se debe a que el operador inverso en el dominio de las frecuencias $\Lambda(\boldsymbol{\xi})$, no es acotado y amplifica los errores de medición a altas frecuencias, lo cual conduce a grandes errores de estimación aún cuando el ruido de medición sea pequeño ([Engl et al., 1996; Kirsch et al., 2011](#)). Para regularizar la fuente estimada, se proponen diferentes operadores, definidos a partir del operador inverso, que actúan como filtros pasa-bajo. Entre ellos, se destaca el operador de regularización definido por

$$R_\mu \widehat{g}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{\Lambda(\boldsymbol{\xi})}{1 + \mu^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^4} \widehat{g}(\boldsymbol{\xi}), \quad (5)$$

donde $0 < \mu < 1$ es el parámetro de regularización, \widehat{g} es la transformada de Fourier de los datos y $\boldsymbol{\xi}$ denota la variable n -dimensional de Fourier en espacio de frecuencia. La fuente a regularizar y la fuente regularizada con el operador definido en (5) se denotan, respectivamente, f_δ y f_2 .

En la siguiente sección, el problema de regularización se encara utilizando una técnica basada en BEMD.

3. REGULARIZACIÓN UTILIZANDO BEMD

BEMD constituye un análisis no lineal de una función de dos variables reales, que no requiere una base predefinida: los modos se obtienen a partir de los datos mediante un algoritmo que se adapta a las características locales de la función, captando su estructura en múltiples escalas (Nunes et al., 2003). Dichos modos se generan en orden creciente de escala, de manera que las componentes de alta frecuencia, generalmente atribuidas al ruido, quedan concentradas en los primeros. El desafío aquí consiste en determinar cuántos de los modos se pueden atribuir al ruido, de forma tal que la suma de los remanentes proporcione una adecuada estimación regularizada de la fuente.

En este trabajo se estudian los errores que se obtienen con diferentes regularizaciones basadas en BEMD considerando tanto f_δ como la fuente exacta f . El objetivo es sentar las bases para el desarrollo futuro de un algoritmo que permita regularizar fuentes estimadas incluso en ausencia de conocimiento previo sobre la fuente real. Con esta finalidad, se proponen las siguientes etapas:

- Se descompone f_δ en modos bidimensionales usando la técnica BEMD.
- Se analiza el nivel de ruido presente en cada modo para detectar información relevante.
- Se obtienen distintas estimaciones de la fuente según la cantidad de modos que se descartan a partir del primero.
- Se realizan análisis local y global de los errores relativos de las distintas estimaciones.
- Se propone la mejor estimación.

4. RESULTADOS

Con el fin de analizar la eficacia del método aquí propuesto para obtener una estimación adecuada de la fuente, se aborda un ejemplo bidimensional donde la fuente es una función no diferenciable f , representada en la Fig. 1, definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} 10 + x - y, & x \in [-10, 0], y \in [0, 10 + x], \\ 10 + x + y, & x \in [-10, 0], y \in [-10 - x, 0], \\ 10 - x - y, & x \in [0, 10], y \in [0, 10 - x], \\ 10 - x + y, & x \in [0, 10], y \in [-10 + x, 0], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (6)$$

Dado que los métodos de regularización tienden a suavizar en exceso las fuentes no diferenciables, resulta pertinente estudiar estas fuentes mediante regularización BEMD, con el propósito de obtener una mejor aproximación.

Para este trabajo, se utiliza la fuente estimada f_δ en Umbricht y Rubio (2024), obtenida en base a los datos $g(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t_0)$ simulados numéricamente a partir de la ecuación RADF (1), utilizando los siguientes valores para los parámetros de la ecuación: $\alpha^2 = 1$; $\beta = (0, 0)$; $\nu = 1$; $N = 1001 \times 1001$ y $t_0 = 0,4$. Los datos ruidosos $g_\delta(\mathbf{x})$ se generan agregando ruido aleatorio con distribución normal, considerando el valor $\delta = 0,01$. Posteriormente, se aplica el operador inverso para obtener la estimación f_δ de la fuente (ver Fig. 1), donde se observa la necesidad de regularizarla, debido a la amplificación de errores.

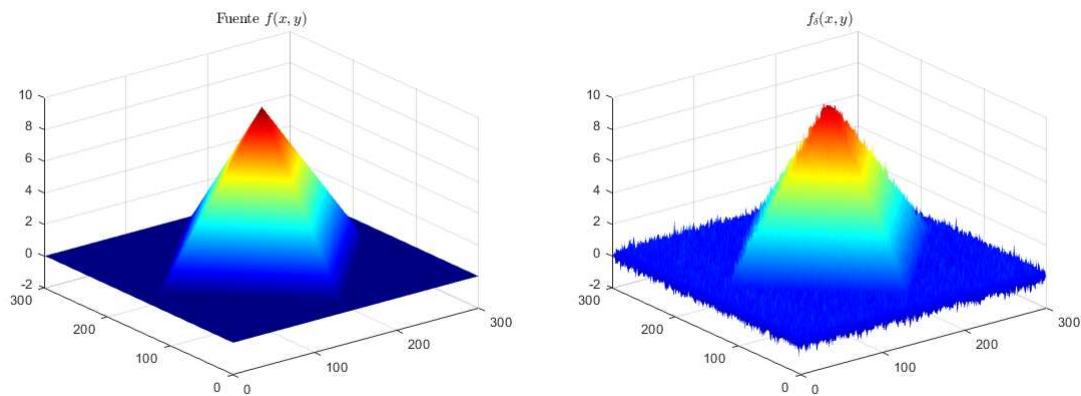


Figura 1: Fuente f y fuente f_δ obtenida con el operador inverso.

4.1. Descomposición BEMD de f_δ

Al aplicar el método BEMD a la fuente f_δ que se pretende regularizar, se obtiene la descomposición en 4 componentes bidimensionales¹. Los modos obtenidos se muestran como imágenes en la Fig. 2.

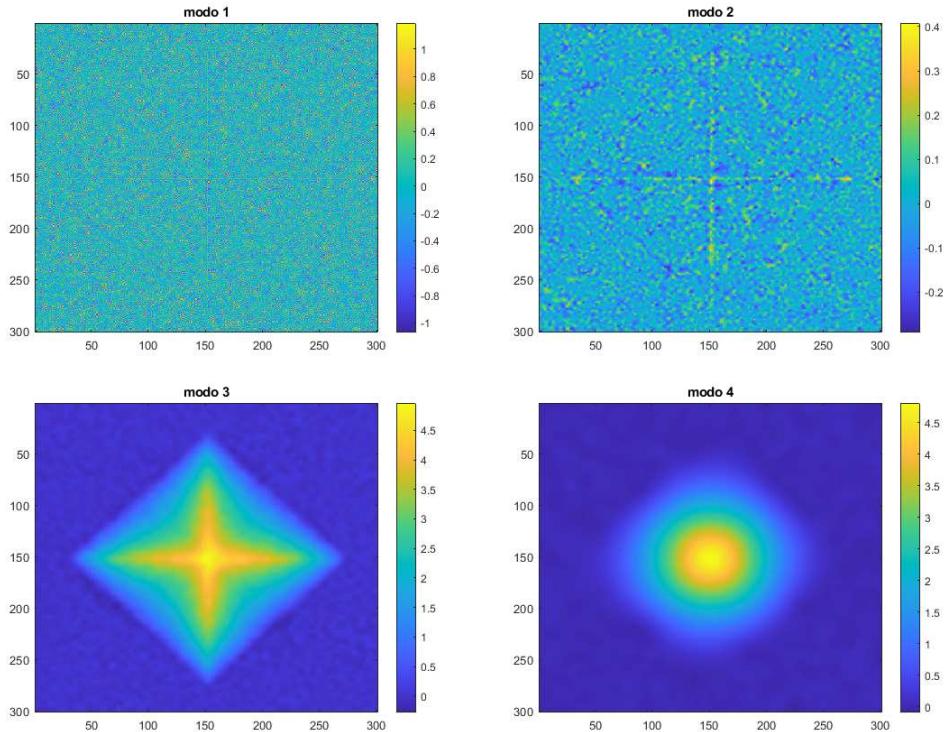


Figura 2: Descomposición en modos con BEMD de $f_\delta(x)$

Se pueden apreciar las características sobresalientes de los distintos modos a partir de las imágenes obtenidas. En los primeros modos se puede observar una gran cantidad de puntos distribuidos de manera aleatoria, que no generan una imagen nítida sino una de aspecto rugoso,

¹El número total de modos, del cual el último es la tendencia, queda determinado por el algoritmo BEMD aplicado. Aquí utilizamos el algoritmo desarrollado por Sasikanth *Bidimensional Empirical Mode Decomposition* (BEMD), MATLAB Central File Exchange.

mientras que en los últimos modos se obtienen imágenes más definidas. Estas imágenes sugieren que, descartando el primero o los dos primeros modos, se podría obtener una fuente más nítida y suavizada.

Consideramos entonces dos aproximaciones de la fuente: $f_{BEMD234}$ que se obtiene al eliminar solo el primer modo y sumando los modos 2, 3 y 4, y f_{BEMD34} , que resulta de eliminar los dos primeros modos, es decir, sumando solo los modos 3 y 4. En la Figura 3 se pueden observar la fuente f , la fuente regularizada f_2 y las aproximaciones obtenidas con BEMD: $f_{BEMD234}$ y f_{BEMD34} .

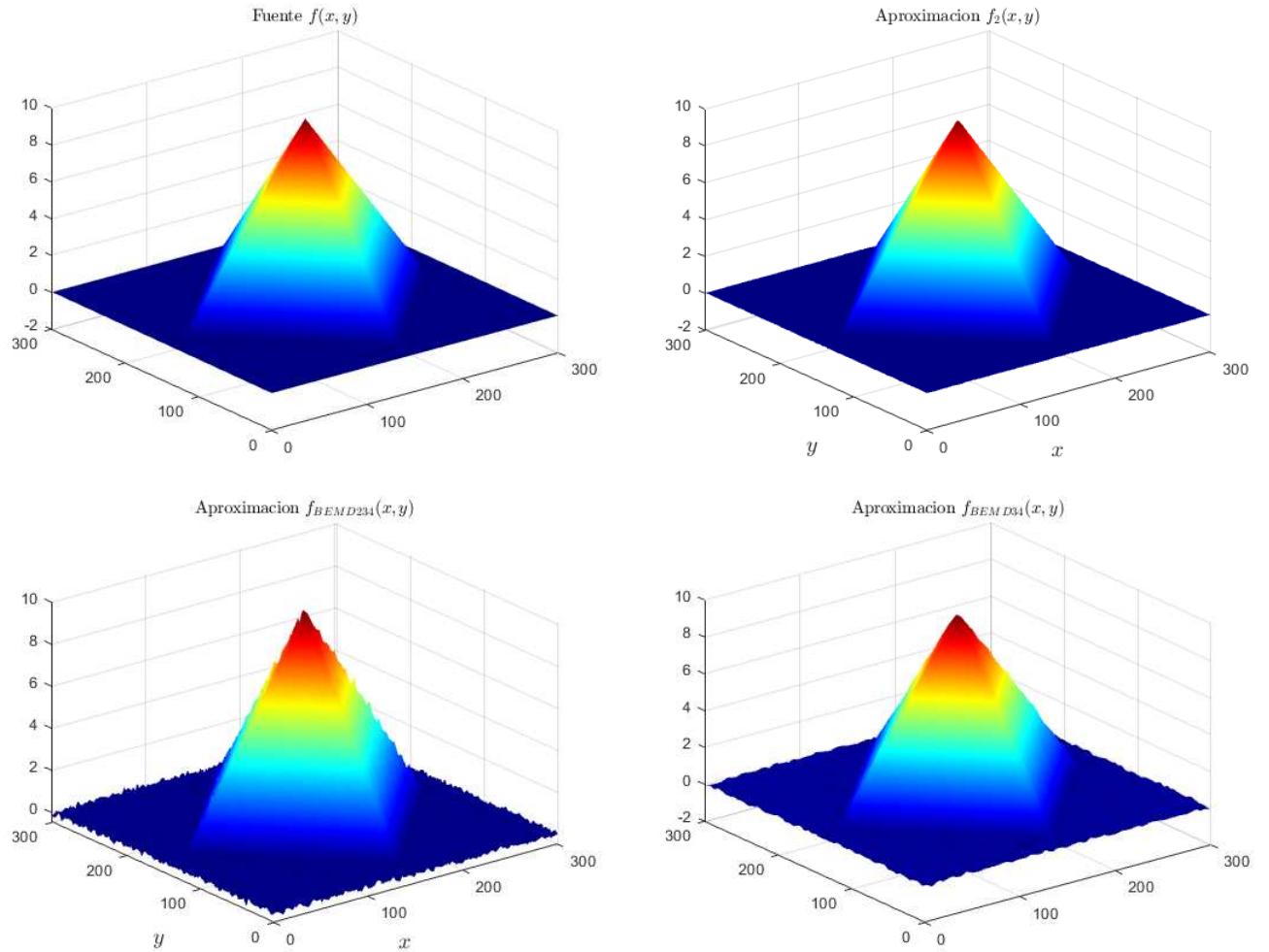


Figura 3: Fuente f y las aproximaciones f_2 , $f_{BEMD234}$ y f_{BEMD34}

En la Fig. 1 se vio que f_δ es muy irregular. En la Fig. 3, se ve que el grado de regularización es creciente al considerar las estimaciones $f_{BEMD234}$, f_{BEMD34} y f_2 . En ese sentido, la mejor la aproximación usando la descomposición BEMD es la f_{BEMD34} . Esto se estudia con más detalle en la próxima sección, donde se hace un análisis de los errores globales y locales de las diferentes regularizaciones.

4.2. Análisis de los errores relativos de las aproximaciones

Se analizan los resultados obtenidos al suavizar la fuente utilizando el método BEMD, que conduce a las aproximaciones $f_{BEMD234}$ y f_{BEMD34} . Con el fin de evaluar el desempeño de cada una de ellas, se caracterizan estadísticamente los errores relativos, tanto a nivel global como a nivel local. En esta sección, se analiza el error relativo considerando distintos aspectos:

- el error relativo acumulado, considerando la norma de Frobenius,
- la distribución estadística de los valores de los errores, por medio de histogramas,
- la distribución espacial de errores, mediante imágenes bidimensionales con los valores de error en cada punto del dominio de la fuente,
- la entropía de las imágenes de error, donde los valores altos reflejarían un nivel de complejidad introducida por ruido.

	$err(g_\delta)$	$err(f_\delta)$	$err(f_2)$	$err(f_{BEMD234})$	$err(f_{BEMD34})$
$\ \cdot \ _{Fro}$	3.9 e-2	1.3 e-1	3.8 e-3	3.6 e-2	2.1 e-2

Tabla 1: Norma de los errores relativos de los datos g_δ y las aproximaciones f_δ , f_2 (obtenida con el operador de regularización definido en (5)), $f_{BEMD234}$ y f_{BEMD34} .

En la Tabla 1 se puede ver que el error de f_δ es un orden de magnitud mayor que el de g_δ . Se observa también que con las regularizaciones $BEMD234$ y $BEMD34$ dicho error disminuye en un orden de magnitud respecto de f_δ , siendo más eficaz la segunda. Por otro lado, f_2 conduce a un error aún menor. Sin embargo, el método propuesto en este trabajo tiene la ventaja de no depender del conocimiento del operador inverso.

La Fig. 4 muestra que los valores de los errores tienen una distribución normal con media 0 en todos los casos, con desvíos que dan cuenta de la calidad de cada aproximación.

En la Fig. 5 se puede observar que los errores relativos f_δ y $f_{BEMD234}$ están distribuidos en todo el dominio, predominando valores del orden de 10^{-4} . En cuanto a la aproximación f_2 , los errores son menores que los de las otras aproximaciones consideradas, en casi todo el dominio, ubicándose en las aristas de la fuente los errores más altos, lo que se debe al suavizado que produce el operador de regularización. Los errores de la aproximación f_{BEMD34} son menores que los de la aproximación $f_{BEMD234}$ y se observa que en la zona central, donde se encuentra el soporte de la fuente exacta f , hay mayor concentración de los valores más bajos de error. Se observa también que en los puntos correspondientes a las aristas los errores toman valores mayores debido al suavizado que se obtiene al quitar altas frecuencias.

La Fig. 6 muestra que se obtiene una versión más organizada, con menor entropía, con f_{BEMD34} , en comparación a la estimación $f_{BEMD234}$. Esta diferencia es aún más notoria en los puntos que corresponden al soporte de la fuente, que es el dominio de mayor interés.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se abordó la estimación del término fuente en una ecuación bidimensional de reacción–advección–difusión–fuente, problema que se enmarca dentro de la clase de problemas inversos mal planteados en el sentido de Hadamard, debido a la no acotación del operador inverso y a la consiguiente sensibilidad frente a perturbaciones en los datos. Para mitigar estas dificultades se propuso una estrategia de regularización basada en la Descomposición Empírica

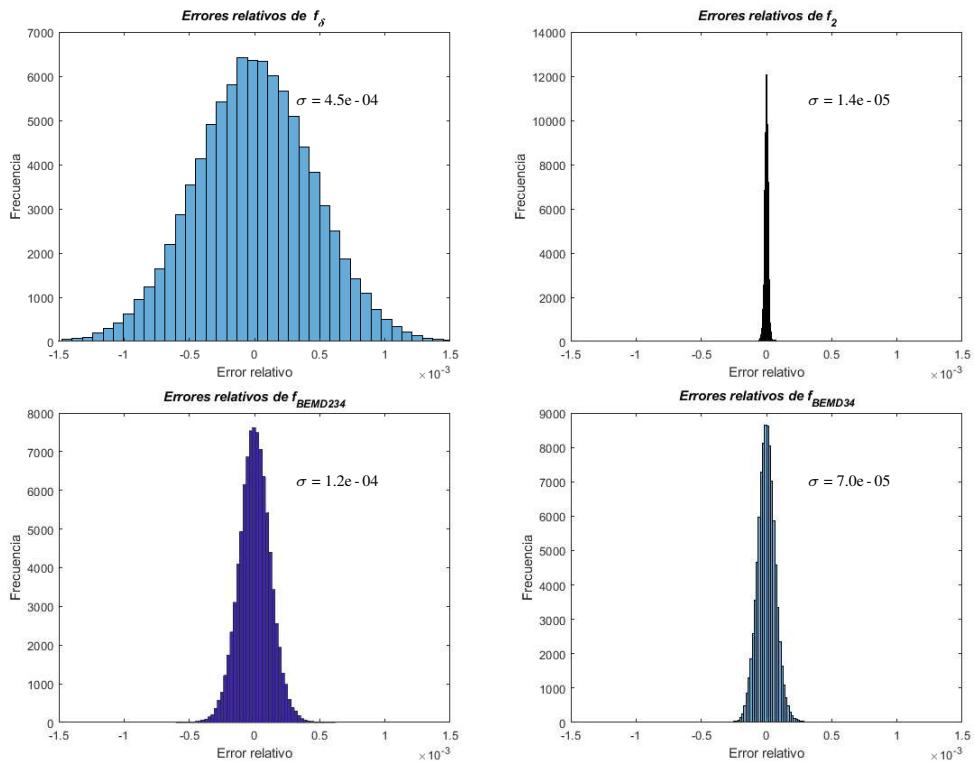


Figura 4: Histogramas de errores con las distintas aproximaciones.

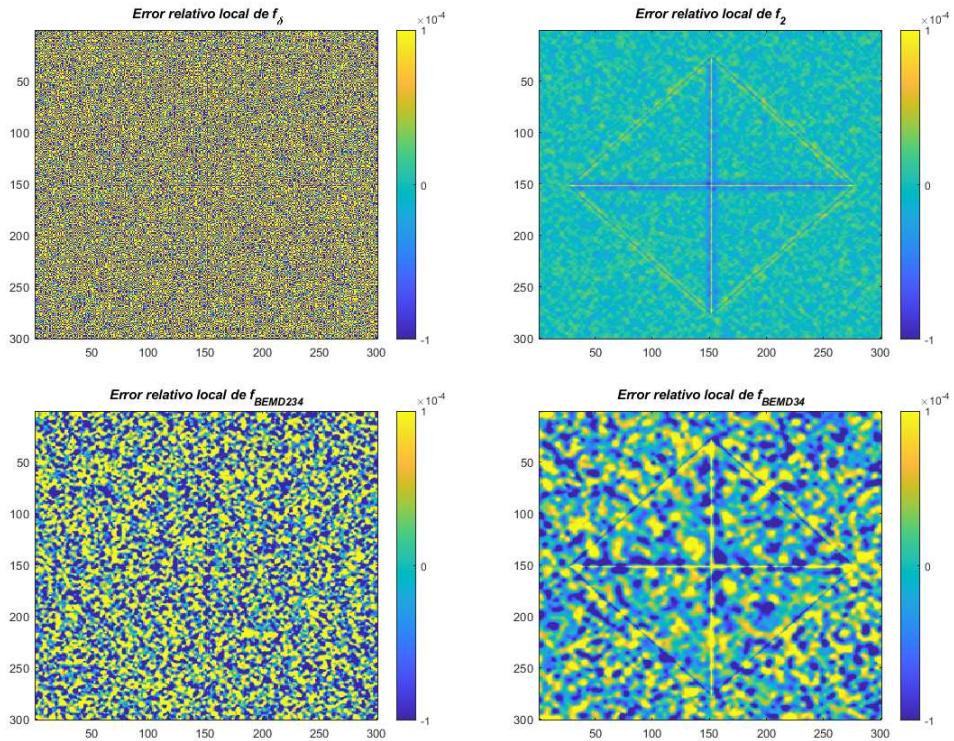


Figura 5: Distribución espacial de los errores relativos.

en Modos Bidimensional (BEMD), cuyo objetivo es atenuar la variabilidad no deseada introducida por el ruido en las mediciones experimentales o simuladas. La efectividad del enfoque

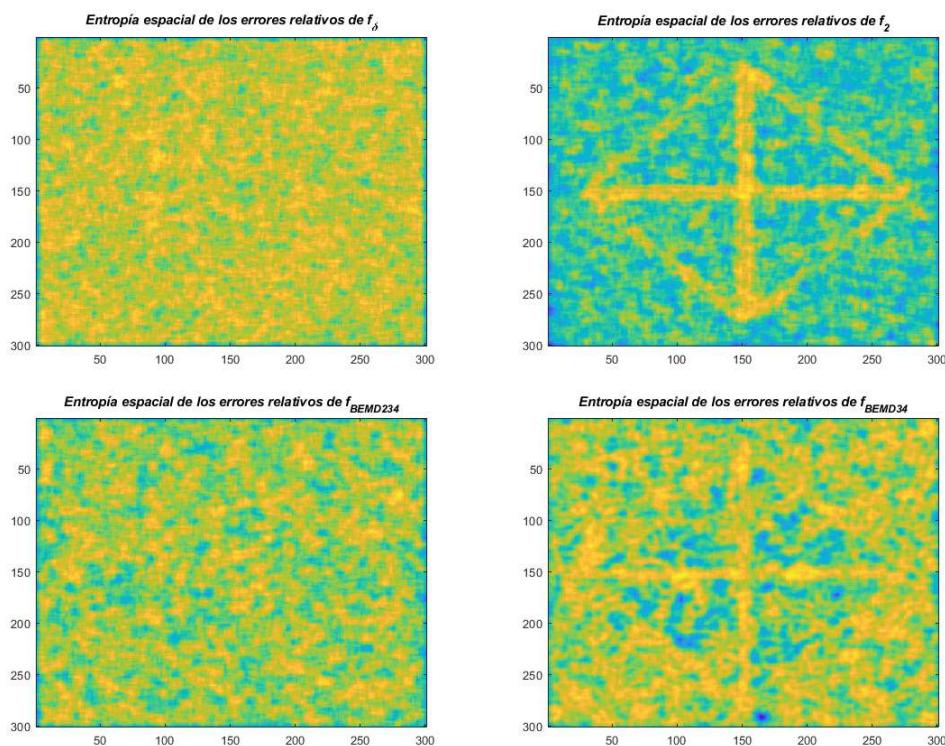


Figura 6: Distribución espacial de la entropía local de los errores relativos para las estimaciones f_δ , f_2 , $f_{BEMD234}$ y f_{BEMD34} .

se ilustró mediante un ejemplo numérico, cuyos resultados fueron contrastados con los obtenidos mediante una técnica de regularización reportada en la literatura. Finalmente, el análisis de las distribuciones y propiedades estadísticas de los errores relativos de aproximación permitió evaluar la robustez y estabilidad de la metodología, destacando su potencial como herramienta de regularización para problemas inversos de este tipo. En este sentido, se continuará profundizando en esta línea de investigación con el propósito de desarrollar una estrategia que permita regularizar funciones desconocidas, incorporando una estimación *a priori* del error asociado a la aproximación regularizada.

REFERENCIAS

- Cortinovis A. y Kressner D. Low-rank approximation in the Frobenius norm by column and row subset selection. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 41(4):1651–1673, 2020. <https://doi.org/10.1137/19M1281848>.
- Engl H.W., Hanke M., y Neubauer A. Regularization of inverse problems. volumen 375. Springer Science & Business Media, 1996. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1740-8>.
- González L. y Suárez A. Improving approximate inverses based on Frobenius norm minimization. *Applied Mathematics and Computation*, 219(17):9363–9371, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.03.057>.
- Hadamard J. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, volumen 171. The Mathematical Gazette, 1924. <https://doi.org/10.2307/3603014>.
- Huang N.E., Shen Z., Long S.R., Wu M.C., Shih H.H., Zheng Q., Yen N.C., Tung C.C., y Liu H.H. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proceedings of the Royal Society of Lon-*

- don. Series A: mathematical, physical and engineering sciences, 454(1971):903–995, 1998. <https://doi.org/10.1098/rspa.1998.0193>.
- Kirsch A. et al. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, volumen 120. Springer, 2011. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-63343-1>.
- Li X.X., Guo H.Z., Wan S.M., y Yang F. Inverse source identification by the modified regularization method on poisson equation. *Journal of Applied Mathematics*, 2012(1):971952, 2012. <https://doi.org/10.1155/2012/971952>.
- Liu L., Liu B., Huang H., y Bovik A.C. No-reference image quality assessment based on spatial and spectral entropies. *Signal processing: Image communication*, 29(8):856–863, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.image.2014.06.006>.
- Morvidone M.A., Masci I., Rubio A.D., Kurtz M.L.A., Tasat D.R., y Piotrkowski R. Particle size and morphological evaluation of airborne urban dust particles by scanning electron microscopy and bidimensional empirical mode analysis. *WSEAS Transactions on Environment and Development*, 20:504–513, 2024. <https://doi.org/10.37394/232015.2024.20.49>.
- Nunes J.C., Bouaoune Y., Delechelle E., Niang O., y Bunel P. Image analysis by bidimensional empirical mode decomposition. *Image and vision computing*, 21(12):1019–1026, 2003. [https://doi.org/10.1016/S0262-8856\(03\)00094-5](https://doi.org/10.1016/S0262-8856(03)00094-5).
- Painam R.K. y Manikandan S. BEMD based adaptive Lee filter for despeckling of SAR images. *Advances in Space Research*, 71(8):3140–3149, 2023. ISSN 0273-1177. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2022.12.009>.
- Rubio D., Sassano N., Morvidone M., y Piotrkowski R. Application of bidimensional empirical mode decomposition for particle identification and size determination. *International Journal of Applied Mathematics, Computational Science and Systems Engineering*, 6:186–192, 2024. <https://doi.org/10.37394/232026.2024.6.16>.
- Sponring J. The entropy of scale-space. En *Proceedings of 13th International Conference on Pattern Recognition*, volumen 1, páginas 900–904. IEEE, 1996. <https://doi.org/10.1109/ICPR.1996.546154>.
- Umbrecht G.F. Identification of the source for full parabolic equations. *Mathematical Modelling and Analysis*, 26(3):339–357, 2021. ISSN 1392-6292/1648-3510. <https://doi.org/10.3846/mma.2021.12700>.
- Umbrecht G.F. y Rubio D. Regularization techniques for estimating the space-dependent source in an n-dimensional linear parabolic equation using space-dependent noisy data. *Computers & Mathematics with Applications*, 172:47–69, 2024. ISSN 0898-1221. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2024.07.029>.
- Yang F. y Fu C.L. A mollification regularization method for the inverse spatial-dependent heat source problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 255:555–567, 2014. ISSN 0377-0427. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.06.012>.