

DISEÑO DE PLACAS LOCALMENTE RESONANTES AMORTIGUADAS

DESIGN OF LOCALLY RESONANT DAMPED PLATES

Víctor H. Cortínez^{a,b,c}, Patricia N. Dominguez^{a,b} y Cecilia I. Stoklas^a

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Facultad Regional Bahía Blanca,
Universidad Tecnológica Nacional, 11 de abril 461, Argentina; vcortine@hotmail.com*

^b*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, B. Blanca, Argentina,
pdoming@uns.edu.ar*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET*

Palabras clave: placas localmente resonantes, resonadores amortiguados, diseño, bandgaps.

Resumen. Se presenta un enfoque para estudiar la dinámica de estructuras localmente resonantes, conformadas por una placa a la que se acopla un conjunto de resonadores elásticos graduados distribuidos periódicamente sobre la misma. El modelo matemático de tal estructura localmente resonante se representa mediante una placa, formulada mediante la teoría de Mindlin, acoplada a una distribución continua de resonadores tipo masa-resorte-amortiguador. Se realiza un análisis modal de tales ecuaciones en términos de las autofunciones correspondientes a la placa huésped (sin resonadores). Se presenta un criterio para definir los “bandgaps” de estas estructuras finitas como aquellos rangos de frecuencia en los cuales todos los factores de amplificación modal son menores que uno. Se proponen fórmulas simples para el prediseño de la rigidez, masa y amortiguamiento del sistema de resonadores en pos de ampliar el rango de atenuación alrededor de una frecuencia objetivo.

Keywords: locally resonant plates, damped resonators, design, bandgaps.

Abstract. A method is presented to study the dynamics of locally resonant structures, consisting of a plate with a set of periodically distributed graded elastic resonators attached. The mathematical model of such a locally resonant structure is represented by a plate, formulated by means of Mindlin's theory, coupled with a continuous distribution of mass-spring-damper systems. A modal analysis of the governing equations is performed in terms of eigenfunctions corresponding to the host plate (without resonators). A criterion to define the bandgaps of these finite structures is presented as those frequency ranges in which all modal amplification factors are less than one. Simple formulas are proposed for the pre-design of the stiffness, mass, and damping of the resonator system in order to broaden the attenuation range around a target frequency.

1 INTRODUCCIÓN

Los metamateriales (y metaestructuras) elásticos localmente resonantes, aparecidos en los últimos años en la tecnología, tienen gran relevancia en diferentes aplicaciones relativas a la atenuación de vibraciones mecánicas y ondas acústicas (Amaral et al., 2023; Zhao et al., 2021). Una manera de lograr una estructura localmente resonante consiste en acoplar una serie de sistemas masa-resorte a una estructura huésped tal como, por ejemplo, una viga o una placa. Una propiedad saliente de tales metamateriales es el hecho de presentar “bandgaps” (BGs) o rangos de frecuencia de excitación donde la propagación de ondas acústicas es fuertemente atenuada (Peng et al., 2015). La dinámica de tales estructuras y los correspondientes BGs se ha estudiado clásicamente considerando propagación de ondas en estructuras infinitas mediante el enfoque de Bloch-Floquet. En efecto, a partir de un análisis de dispersión de ondas pueden definirse los BGs como rangos de frecuencias donde la propagación de ondas es inhibida (Chen et al., 2022).

El concepto de BGs puede ser también analizado a partir de las vibraciones libres de estructuras finitas localmente resonantes, como ha sido demostrado por Sugino et al. (2017). En particular, ellos han analizado estructuras localmente resonantes consistentes tales como una viga Bernoulli-Euler o una placa Kirchoff acoplada a varios sistemas masa-resorte de un grado de libertad. Un enfoque más general fue desarrollado para el estudio de la dinámica flexo-torsional de vigas localmente resonantes de sección transversal asimétrica (Dominguez et al. 2022; Cortínez y Dominguez, 2022).

En este trabajo se analiza una estructura tipo placa de espesor moderado a la que se acopla un conjunto de resonadores elásticos graduados amortiguados distribuidos periódicamente sobre la misma. En efecto, tales placas se conciben como una sucesión de celdas cuasi periódicas. Cada celda está compuesta por una serie de resonadores, de igual masa pero con frecuencias naturales locales ligeramente diferentes, adosada a la correspondiente porción de placa. El modelo matemático de tal estructura localmente resonante se representa mediante una placa, formulada mediante la teoría de Mindlin, acoplada a una distribución continua (homogeneizada) de resonadores tipo masa-resorte-amortiguador (Cortínez et al., 2023). Para analizar la dinámica de tales estructuras se realiza un análisis modal de tales ecuaciones en términos de las autofunciones correspondientes a la placa huésped (sin resonadores). Se muestra que es posible identificar los BGs de estas estructuras finitas, considerando vibraciones forzadas, mediante la determinación de aquellos rangos de frecuencia en los cuales todos los factores de amplificación modal son menores que uno. Es decir, que en tales rangos la respuesta dinámica se atenúa. Este nuevo criterio para la identificación de BGs en estructuras finitas generaliza al enfoque propuesto por Sugino et al. (2017). Además, permite considerar la formación de BGs multi frecuencia y, en particular, permite obtener BGs tipo “rainbow” a partir de la graduación de los resonadores (resonadores con frecuencias locales cercanas) (Cortínez y Dominguez, 2023). Esta última estrategia puede ser utilizada para extender el ancho de banda de atenuación total si se logra atenuar la respuesta dinámica en los rangos de frecuencia entre BGs. Se muestra en este trabajo que esto se puede lograr seleccionando adecuadamente las razones de amortiguamiento de los resonadores distribuidos.

Para el prediseño de los parámetros correspondientes a los resonadores locales (masas, rigideces y razones de amortiguamiento) se proponen fórmulas simplificadas para evaluar el efecto dinámico de los mismos. Dichas fórmulas permiten determinar tanto la estructura de bandgaps así como el factor de amplificación dinámico de manera (cuasi) independiente de los detalles de la estructura huésped y del tipo de carga, es decir tan solo dependientes de las

frecuencias de excitación y de las características de los resonadores.

Se presenta la formulación teórica y se brindan ejemplos numéricos de aplicación.

2 DINÁMICA TRANSVERSAL DE PLACAS LOCALMENTE RESONANTES CON AMORTIGUAMIENTO

2.1 Ecuaciones gobernantes para placas con resonadores amortiguados distribuidos

Se considera una estructura finita tipo placa concebida como una sucesión de N_s celdas de igual área ΔA (Figura 1a), sujeta a cargas armónicas transversales. Cada celda contiene un sistema de N_r resonadores paralelos de rigidez K_j y masa M_j , orientados en la dirección del eje z como se muestra en la Figura 1b. Se asume que las N_s celdas tienen idéntica configuración de resonadores y que la distancia entre ellas es muy pequeña en comparación con el área de la placa. Esta característica hace posible considerar, de manera aproximada, que los resonadores se encuentran distribuidos de manera continua sobre la placa (homogeneización).

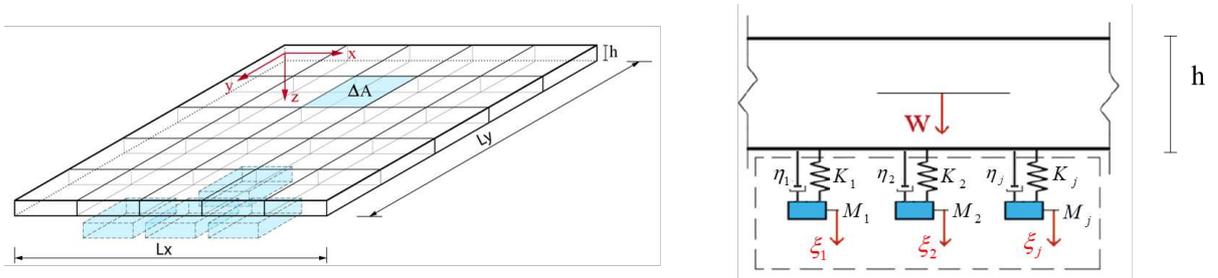


Figura 1: Placa Mindlin con resonadores periódicamente distribuidos, a) Geometría de la placa, b) Esquema de resonadores en cada celda.

La dinámica de tal sistema se describe mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 & -\tilde{G}h \left(\nabla^2 w - \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_z e^{i\omega t} - \sum_{j=1}^{N_r} \rho \alpha_j h \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} \\
 & D \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \tilde{G}h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} = 0 \quad (1a-c) \\
 & D \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D \left(\frac{1-\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + D \left(\frac{1+\mu}{2} \right) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \tilde{G}h \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right) - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} = 0 \\
 & \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial t^2} + 2\eta_j \omega_j \frac{\partial \xi_j}{\partial t} + \omega_j^2 \xi_j = \omega_j^2 w + 2\eta_j \omega_j \frac{\partial w}{\partial t} \quad j = 1, 2, \dots, N_r \quad (2)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones (1a-c) corresponden a la teoría de Mindlin de placas gruesas (Chen et al., 2022). Aquí ρ , es la densidad del material de la placa y h el espesor de la misma, w corresponde al desplazamiento transversal del plano medio de la placa en la dirección z , ϕ_x y ϕ_y son los giros flexionales con respecto a y y x respectivamente, $\tilde{G} = G\chi$ donde G es el módulo de elasticidad transversal del material y χ corresponde al factor de corte, D es la rigidez a flexión de la placa y μ el coeficiente de Poisson. Asimismo, q_z corresponde a la amplitud de la carga distribuida aplicada en la dirección de z , y ω es la frecuencia de excitación. Asimismo, se ha definido α_j como la relación de masas de cada resonador j

de la celda con respecto a la masa de la placa en la misma como:

$$\alpha_j = \frac{M_j}{\rho h \Delta A} \quad (3)$$

La ecuación (2) corresponde a la dinámica de cada uno de los resonadores, donde ξ_j corresponde al desplazamiento transversal de la masa M_j siendo η_j y ω_j ($\omega_j = \sqrt{K_j / M_j}$) la razón de amortiguamiento y la frecuencia local del resonador j -ésimo respectivamente. El sistema se complementa con las correspondientes condiciones de borde.

2.2 Análisis modal de placas localmente resonantes amortiguadas

La respuesta forzada de la placa localmente resonante formulada se puede expresar en términos de los modos de vibración $W_n, \varphi_{xn}, \varphi_{yn}$ correspondientes a la frecuencia natural ω_n de la placa sin resonadores:

$$w = \sum_n A_n W_n e^{i\omega t}, \quad \phi_x = \sum_n A_n \varphi_{xn} e^{i\omega t}, \quad \phi_y = \sum_n A_n \varphi_{yn} e^{i\omega t}, \quad \xi_j = \sum_n B_{jn} W_n e^{i\omega t} \quad (4)$$

Sustituyendo tales expresiones en la ecuación (2) y factorizando la función exponencial $e^{i\omega t}$ se obtiene:

$$\sum_n W_n \left(B_{jn} (-\omega^2) + 2\eta_j \omega_j (i\omega) B_{jn} + \omega_j^2 B_{jn} \right) - \sum_n W_n \left(\omega_j^2 A_n + 2\eta_j \omega_j A_n (i\omega) \right) = 0 \quad (5)$$

La expresión anterior se cumple cuando los factores de W_n , para cada n , son nulos. Luego, despejando B_{jn} se llega a:

$$B_{jn} = A_n (\gamma_{R_j} + \gamma_{I_j} i) \quad (6)$$

donde se ha definido:

$$\gamma_{R_j} = \frac{\omega_j^2 (\omega_j^2 - \omega^2) + (2\eta_j \omega_j i\omega)^2}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\eta_j \omega_j i\omega)^2}, \quad \gamma_{I_j} = \frac{-2\eta_j \omega_j \omega^2}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\eta_j \omega_j i\omega)^2} \quad (7)$$

Reemplazando ahora (4) en (1), teniendo en cuenta (6) y (7), multiplicando (1a) por W_m , (1b) por φ_{xm} , (1c) por φ_{ym} , sumando tales expresiones, integrando y considerando las condiciones de ortonormalidad de las autofunciones W_n , φ_{xn} y φ_{yn} , se llega a la siguiente expresión:

$$A_n \left(\rho h (\omega_n^2 - \omega^2) - \sum_n \alpha_j \omega^2 (\gamma_{R_j} + \gamma_{I_j} i) \right) = \int_A q_z W_n dA \quad (8)$$

Para esta última expresión se ha despreciado la inercia rotatoria de la placa. A partir de esta última se pueden obtener los coeficientes A_n como:

$$A_n = \frac{\int_A q_z W_n dA}{\rho h (\omega_n^2 - \omega^2) - \sum_n \alpha_j \omega^2 (\gamma_{R_j} + \gamma_{I_j} i)} \quad (9)$$

Las expresiones (6), (7) y (9) introducidas en (4) permiten obtener la respuesta dinámica compleja del sistema. Si lo que interesa es la amplitud de tal respuesta ($w = \sum_n |A_n| |W_n|$) debe obtenerse el módulo de cada componente modal mediante la expresión:

$$|A_n| = \frac{|q_n|}{\rho h \omega_n^2} Fa_n \quad (10)$$

donde se ha definido el factor de amplificación modal Fa_n como:

$$Fa_n = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \gamma_{R_j}\right)\right)^2 + \left(\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \sum_{j=1}^{Nr} \alpha_j \gamma_{I_j}\right)^2}} \quad (11)$$

Debe observarse que tales expresiones dependen de las frecuencias naturales de la estructura huésped, de las frecuencias locales, razones de amortiguamiento y relaciones de masa de los resonadores y de la frecuencia de excitación.

2.3 Determinación de bandgaps (BGs)

Si se considera el caso de resonadores no amortiguados ($\eta_j = 0$) la expresión (11) se reduce a:

$$Fa_n = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{Nr} \frac{\alpha_j}{1 - (\omega/\omega_j)^2}\right)\right|} \quad (12)$$

En esta última expresión debe observarse que, si el factor del segundo término del denominador es menor que cero, es decir si:

$$1 + \sum_{j=1}^{Nr} \frac{\alpha_j}{1 - (\omega/\omega_j)^2} < 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

el denominador de la expresión (12) es mayor que 1, independientemente del valor de la frecuencia ω_n y entonces, se puede asegurar que todos los factores de amplificación son menores que 1, es decir:

$$Fa_n < 1 \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Esto significa que la respuesta dinámica será atenuada (no amplificada) por los resonadores y, consecuentemente, en el rango de frecuencias donde se verifique (13) no puede haber resonancias.

Por otra parte, se puede notar que la expresión que figura en el miembro izquierdo de la desigualdad (13) es la definición del cociente entre la densidad equivalente y la densidad de la estructura base correspondiente a una placa localmente resonante (Cortínez et al., 2023):

$$\frac{\rho_{eq}}{\rho} = 1 + \sum_{j=1}^{Nr} \frac{\alpha_j}{1 - (\omega / \omega_j)^2} \quad (15)$$

Como se mostró en dicha referencia, el rango de frecuencias ω para el cual la expresión (15) es negativa corresponden a un BG, coincidentemente con su definición desde el punto de vista de la propagación de ondas transversales en placas infinitas (Sugino et al., 2017; Chen et al., 2022). Luego, el hecho de que en los BGs los factores de amplificación sin amortiguamiento (12) sean menores que 1 es una forma alternativa de definir el concepto de BG para estructuras finitas.

2.4 Diseño del sistema de resonadores: bandas de atenuación efectivas

Para efectuar el prediseño del sistema de resonadores a adosar a una placa con el fin de atenuar la respuesta dinámica en cercanías de una frecuencia objetivo (usualmente alguna de sus frecuencias naturales), en primer lugar deben seleccionarse las relaciones de masa α_j , los tipos de resonadores por celda y las frecuencias ω_j de los mismos (y entonces sus rigideces).

El criterio para adoptar estos últimos debe considerar que la frecuencia local más baja debe ser ligeramente menor que la frecuencia objetivo. Una vez preseleccionados tales parámetros, la expresión (13) permite calcular los BGs y evaluar si están adecuadamente ubicados en el rango de frecuencias deseado.

Cuando existe un solo tipo de resonadores por celda se obtiene un BG aislado. Se puede ampliar el rango de atenuación efectivo agregando amortiguamiento a los resonadores para disminuir la respuesta a los costados de tal BG.

Otra estrategia para ampliar el rango de atenuación consiste en seleccionar diferentes tipos de resonadores graduados, es decir, con frecuencias locales diferentes pero cercanas a la frecuencia objetivo. Esto da como resultado un conjunto de BGs, cercanamente ubicados, que pueden presentar desde su frecuencia de inicio a la de finalización, un mayor ancho de banda que el correspondiente al uso de un solo tipo de resonador (efecto rainbow). Sin embargo, entre tales BGs cercanos existen rangos de frecuencia que pueden presentar condiciones resonantes. Luego, para evitar tales efectos de manera tal que la serie de BGs (rainbow) sea una banda efectiva de atenuación debe considerarse amortiguamiento en los resonadores (Cortínez et al., 2023).

Para seleccionar los valores apropiados de las razones de amortiguamiento de los resonadores (η_j) debe procurarse que los mismos sean suficientemente grandes como para atenuar convenientemente la respuesta fuera, o entre BGs, pero no tan altos como para anular el efecto localmente resonante dentro de los BGs. Para una evaluación cuidadosa de cierta selección de valores de diseño puede realizarse un estudio dinámico completo a partir de las ecuaciones (1) y (2), utilizando, por ejemplo, el Método de Elementos Finitos (MEF). Sin embargo, esto puede resultar costoso computacionalmente, sobre todo en etapas de prediseño, por lo que se propone el procedimiento que se muestra a continuación.

Siendo que el rango de frecuencias ω es cercano a una de las frecuencias naturales ω_n (frecuencia objetivo) el correspondiente modo tiende a ser dominante. Luego, para su control, tal factor de amplificación modal (11) debe ser el menor posible. Entonces, el uso de esta simple fórmula para evaluar el efecto de la razón de amortiguamiento es muy conveniente puesto que resulta independiente de la carga y de las condiciones de borde de la estructura base. Por lo expuesto, puede evaluarse el diseño preliminar de la placa localmente resonante a partir de las fórmulas (11) y (13), dejando el análisis detallado (Ecuaciones 1 y 2) para la verificación final.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se consideran las vibraciones forzadas transversales de una placa simplemente apoyada de lados $L_x=L_y=1\text{m}$ y espesor $h=L_x/20\text{m}$, acoplada a sistemas de resonadores masa-resorte distribuidos de manera uniforme (Figura 1). Las características del material de la placa huésped (sin resonadores) son: módulo de elasticidad $E=2\text{e}11\text{ Pa}$, módulo de elasticidad transversal $G=0.769\text{e}11\text{ Pa}$, densidad $\rho=7800\text{ kg/m}^3$, $\chi=0.8$ y $\mu=0.3$. La frecuencia fundamental de esta placa es $\omega_{1\text{placa}}=1473\text{ rad/s}$. Se pretende que el sistema de resonadores produzca la atenuación de la respuesta forzada en un entorno a dicha frecuencia. Se considera para ello (Caso 1) un solo resonador en cada celda con una frecuencia local ligeramente inferior a la frecuencia de resonancia que se quiere eliminar: $\omega_1=0.96\omega_{1\text{placa}}$. Asimismo, se considera una relación de masas $\alpha_1=0.25$.

En primer lugar, se ha determinado el correspondiente BG a partir de la expresión (13), que se extiende entre 1414 y 1580 rad/s (Figura 2a). Se considera ahora la vibración forzada de dicha placa teniendo en cuenta una carga de amplitud $q_z=1000\text{ Pa}$ aplicada en la mitad izquierda de la estructura. La correspondiente respuesta forzada se determina resolviendo las ecuaciones (1) y (2) mediante el MEF para las siguientes situaciones: a) la placa sin resonadores, b) la placa localmente resonante (con resonadores) considerando amortiguamiento nulo de los resonadores, $\eta=0$, c) ídem b) con coeficiente de amortiguamiento de los resonadores $\eta=0.025$, y d) ídem b) con $\eta=0.1$.

En la Figura 2a se muestran las correspondientes respuestas en frecuencia para el valor absoluto del desplazamiento transversal en el centro de la placa (máximo desplazamiento) utilizando escala logarítmica. Se puede apreciar que el pico resonante de la placa base es completamente anulado en la zona del BG por los resonadores no amortiguados. En particular se observa una anti resonancia a la izquierda del BG. Sin embargo, puede apreciarse que existen resonancias fuera del mismo. De hecho, a la izquierda inmediatamente afuera se observan picos resonantes. En principio éstos podrían representar un estado indeseado si la frecuencia externa se aleja levemente del BG. De todas maneras puede notarse que a medida que aumenta la razón del amortiguamiento interno del resonador, tales picos resonantes desaparecen. No obstante, dentro del BG la amplitud del desplazamiento va aumentando con dicha razón de amortiguamiento. Como se espera que las frecuencias de excitación tengan mayor probabilidad de ocurrencia en la zona del BG (porque así ha sido diseñado) debe procurarse que este aumento en la amplitud de la respuesta no sea muy alto. Para ello, debe seleccionarse un valor adecuado de la razón de amortiguamiento que balancee la atenuación del pico resonante afuera del BG, con el aumento del nivel de desplazamiento adentro del mismo. Por ejemplo, la respuesta correspondiente a $\eta=0.025$ no altera prácticamente la amplitud dentro del BG y permite atenuar el pico resonante de la izquierda. En cambio, un resonador con una razón de amortiguamiento igual a 0.1 produce un levantamiento más alto en la zona de BG. La elección adecuada de η va a depender del máximo valor permitido para

el aumento de respuesta dentro del BG.

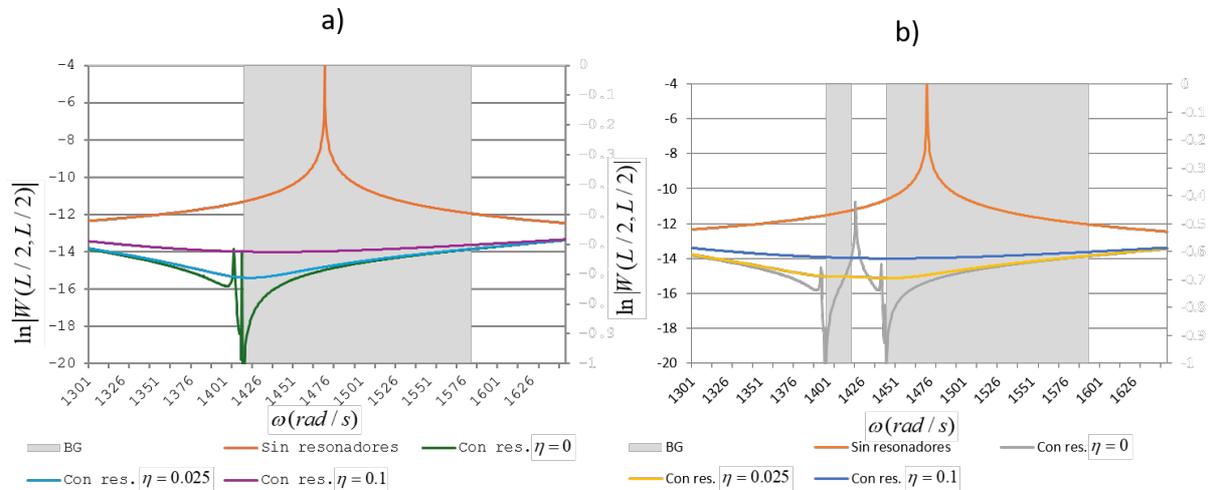


Figura 2: Respuesta en frecuencia $\ln|W(Lx/2, Ly/2)|$ para una placa simplemente apoyada considerando distintas razones de amortiguamiento. a) Un resonador en cada celda (Caso 1) y b) 2 resonadores en cada celda (Caso 2).

Se considera a continuación (Caso 2) una modificación del ejemplo anterior que consiste en la utilización de 2 resonadores por celda, teniendo cada uno de ellos una razón de masas $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.125$ (igual masa total por celda que en el caso anterior). Los coeficientes de resorte, en este caso, se eligen ligeramente diferentes en cada resonador, de manera tal de producir frecuencias locales similares con valores $\omega_1 = 0.95\omega_{1\text{placa}}$ y $\omega_2 = 0.98\omega_{1\text{placa}}$. Esta configuración produce 2 BGs que se determinan con la ecuación (13) delimitados por las frecuencias 1400 y 1418 rad/s en el caso del primer BG y por las frecuencias 1444 y 1592 rad/s en el segundo, como se muestra en la Figura 2b. Entre ambos BGs existe una pequeña zona en la cual pueden existir resonancias si la frecuencia externa cae dentro de dicho rango. Por otra parte, si el amortiguamiento interno de los resonadores puede atenuar tales resonancias, los 2 BGs pueden combinarse originando una zona de atenuación efectiva más ancha. A su vez, como se analizó en el ejemplo anterior, el amortiguamiento de los resonadores también puede ampliar la zona de atenuación a izquierda y a derecha de los límites inferior y superior de los BG₁ y BG₂ respectivamente. Se han determinado las respuestas en frecuencia considerando diferentes razones de amortiguamiento de los resonadores, $\eta = 0$, $\eta = 0.025$ y $\eta = 0.1$ (considerando en todos los casos el mismo amortiguamiento para los 2 resonadores de cada celda). En la Figura 2b se muestran las correspondientes respuestas en frecuencia para el valor absoluto del desplazamiento transversal en el centro utilizando escala logarítmica. Se observa que, como era de esperar, no aparecen picos resonantes dentro de los BGs, aunque sí en la zona intermedia. Esto es especialmente notado cuando los resonadores no presentan amortiguamiento interno. Se puede ver, sin embargo, que un pequeño amortiguamiento de los mismos ($\eta = 0.025$) lleva los valores de amplitud a tener prácticamente la misma intensidad que dentro de los BGs. Por otra parte, el caso con mayor amortiguamiento ($\eta = 0.1$) conduce a valores más altos de la amplitud, tanto en los BGs como en la zona intermedia porque se anula el efecto localmente resonante. Entonces, para este caso, la consideración de un pequeño amortiguamiento de los resonadores ($\eta = 0.025$) puede ser mejor para lograr una zona de atenuación mayor.

A continuación se muestra que, de acuerdo a lo indicado en la sección 2.4, la respuesta en frecuencia en cercanías de la frecuencia objetivo (en este caso $\omega_{1\text{placa}} = 1473 \text{ rad/s}$) se puede evaluar de manera muy expeditiva para propósitos de prediseño utilizando la fórmula

simplificada (12). En efecto, la Figura 3a muestra el factor de amplificación modal correspondiente a la frecuencia objetivo del Caso 2 para las siguientes situaciones: a) la estructura sin resonadores, b) la estructura con resonadores $\eta=0$, c) ídem b) con coeficiente de amortiguamiento de los resonadores $\eta=0.025$, y d) ídem b) con $\eta=0.1$. Tales curvas resultan independientes de la carga contemplada así como de los detalles de la estructura huésped. Sin embargo, el nivel de atenuación del factor Fa de la estructura localmente resonante, con respecto al correspondiente a la estructura huésped, es similar al que presenta la respuesta en frecuencia de la estructura analizada, tal como la mostrada en la Figura 2b. Esta similitud resulta independiente de la carga. De hecho, en la Figura 3b se muestra la respuesta en frecuencia para la placa simplemente apoyada (Caso2) considerando ahora una carga uniforme en toda la superficie. Comparando las Figuras 3a y 3b se observa que se mantiene la semejanza aludida.

Eventualmente, si la estructura fuera diferente o tuviera otras condiciones de borde, aunque teniendo una frecuencia natural idéntica a la considerada, se mantendría la misma similitud en cercanía de la frecuencia objetivo. Así, por ejemplo, en la Figura 3c se presenta la respuesta en frecuencia para una placa cuadrada empotrada con $Lx=Ly=1.359$ m, teniendo la misma frecuencia natural que la del caso anterior y sometida a una carga armónica distribuida aplicada en la mitad izquierda de la estructura. Como se observa en la comparación de las Figuras 3a y 3c, las relaciones de atenuación de las respuestas para distintos grados de amortiguamiento de los resonadores son muy similares a las de la estructura empotrada mencionada.

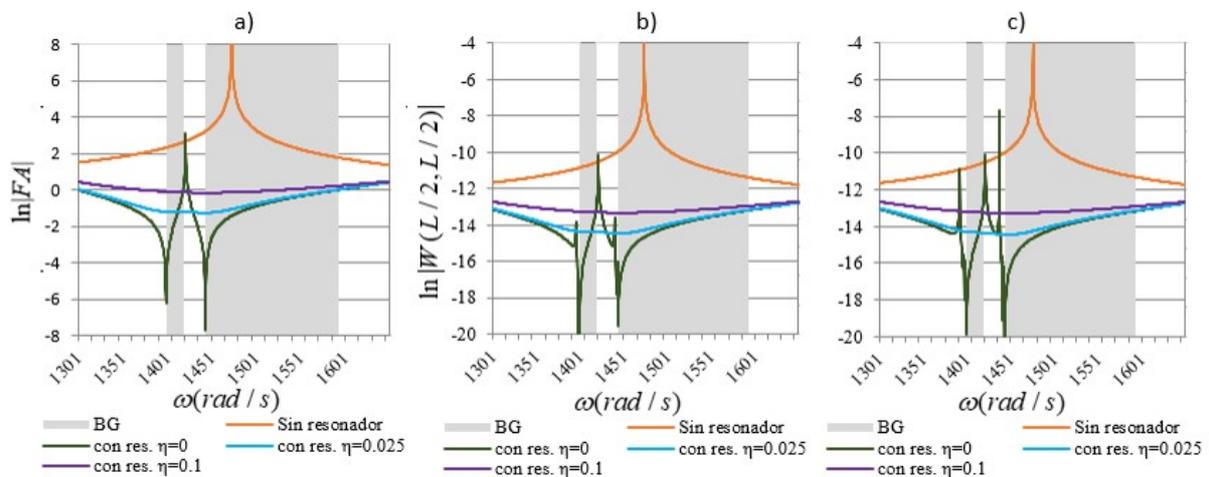


Figura 3: Respuesta en frecuencia en cercanías de la frecuencia objetivo $\omega_{placa}=1473$ rad/s usando 2 resonadores, a) factor de amplificación modal, b) desplazamiento máximo para una placa simplemente apoyada con carga distribuida y c) ídem b) para una placa empotrada con carga parcialmente distribuida.

4 CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación homogeneizada de la dinámica de placas localmente resonantes de espesor moderado contemplando resonadores graduados amortiguados. A partir del análisis modal de tales ecuaciones, se ha arribado a un nuevo criterio para obtener la estructura de BGs en placas finitas, como el rango de frecuencias donde todos los factores de amplificación modal son menores que 1. Asimismo, se ha propuesto una fórmula simplificada basada en el uso del factor de amplificación modal dominante, para evaluar el efecto de los diferentes parámetros de los resonadores. Tal fórmula es cuasi independiente de las condiciones de borde y de la distribución de carga de la estructura. Esto puede resultar

atractivo para el prediseño del sistema de resonadores, dejando el análisis numérico detallado de la estructura localmente resonante para la instancia final de diseño.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue auspiciado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur y el CONICET.

REFERENCIAS

- Amaral, D. R., Ichchou, M.N., Kolakouski, P., Fossat, P. y Salvia, M. Lightweight gearbox housing with enhanced vibro-acoustic behavior through the use of locally resonant metamateriales, *Applied Acoustics* 210, 109435, 2023.
- Chen, J-H, Chao, I-C y Chen, T. Bandgaps for flexural waves in infinite beams and plates with a periodic array of resonators. *Journal of Mechanics* 38, 376–389, 2022.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N. Una teoría general para la estimación de bandgaps en la vibración flexo-torsional de vigas Vlasov, *Mecánica Computacional* 39, 531-540, 2022.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N. Dinámica de vigas Vlasov localmente resonantes con resonadores graduados. *Mecánica Computacional* 40, 533-542, 2023.
- Cortínez, V.H., Dominguez, P.N., González de Paz, L.V. y Ripani, M. Bandas de atenuación multifrecuencia en placas de metamaterial, *Mecánica Computacional* 40, 39-48, 2023.
- Cortínez, V.H., Dominguez, P.N., Stoklas, C.I. y Sequeira, M.E. Dinámica de placas localmente resonantes con amortiguamiento, *XVIII Congreso Argentino de Acústica, AdAA* 2023.
- Dominguez, P.N., Cortínez, V.H. y Piovan, M.T. Attenuation bands for flexural-torsional vibrations of locally resonant Vlasov beams. *Thin-Walled Structures* 181 110115, 2022.
- Peng, H., Pai, F-P y Deng, H. Acoustic multi-stopband metamaterial plates design for broadband elastic wave absorption and vibration suppression. *International Journal of Mechanical Sciences* 103, 104-114, 2015.
- Sugino, C., Xia, Y., Leadenham, S., Ruzzene, M. y Erturk, A. A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures, *Journal of Sound and Vibration* 406, 104-123, 2017.
- Wang, T., Sheng, M.P., Guo, Z.W. y Qin, Q.H. Acoustic characteristics of damped metamaterial plate with parallel attached resonators, *Archives of Mechanics* 69, 29-52, 2017.
- Zhao, H., Zheng, Q., Wang, Y., Cao, J., Wang, C. y Wen, J. Acoustic absorption of a metamaterial panel: mechanism, boundary effect and experimental demonstration, *Applied Acoustics* 184, 108369, 2021.