

## SOLUCIÓN ANALÍTICA Y NUMÉRICA PARA UN PROBLEMA BIDIMENSIONAL DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN MATERIALES BICAPA

### ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS FOR A TWO-DIMENSIONAL HEAT TRANSFER PROBLEM IN TWO-LAYER MATERIALS

Guillermo F. Umbricht<sup>a</sup>, Domingo A. Tarzia<sup>b,c</sup> y Diana Rubio<sup>d</sup>

<sup>a</sup>LIDTUA, Facultad de Ingeniería, Universidad Austral, Mariano Acosta 1611, Pilar, B1629WWA  
Buenos Aires, Argentina, GUmbricht@austral.edu.ar, <https://www.austral.edu.ar>

<sup>b</sup>CONICET, Godoy Cruz 2290, CABA, C1425FQB Buenos Aires, Argentina, <https://www.conicet.gov.ar>

<sup>c</sup>Depto. de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral, Paraguay 1950,  
Rosario, S2000FZF Santa Fe, Argentina, DTarzia@austral.edu.ar, <https://www.austral.edu.ar/rosario>

<sup>d</sup>ITECA (UNSAM-CONICET), ECyT, Centro de Matemática Aplicada, UNSAM, 25 de mayo y Francia,  
B1650 San Martín, Buenos Aires, drubio@unsam.edu.ar, <https://iteca.conicet.gov.ar>

**Palabras clave:** Transferencia de calor, Materiales multicapa, Materiales compuestos, Resistencia térmica de la interfaz.

**Resumen.** En este trabajo se estudia un problema 2D de transferencia de calor transitoria de un cuerpo bicapa embebido en un fluido en movimiento. Se considera un proceso de transferencia completo teniendo en cuenta la difusión, la disipación convectiva, las pérdidas de flujo lateral, la generación interna de calor y la resistencia térmica que ofrece la interfaz, en la cual se cumple la continuidad del flujo y se presenta un salto de temperatura. La situación de interés se modela matemáticamente, se encuentran soluciones analíticas explícitas utilizando técnicas de Fourier y se formula un esquema convergente en diferencias finitas para simular casos particulares. La solución es consistente con resultados anteriores. Se incluye un ejemplo numérico que muestra coherencia entre los resultados obtenidos y la física del problema.

**Keywords:** Heat transfer, Multilayer materials, Composite materials, Interfacial thermal resistance.

**Abstract.** This work addresses a two-dimensional transient heat transfer problem in a bilayer body embedded in a moving fluid. A comprehensive transfer process is considered, taking into account diffusion, convective dissipation, lateral heat losses, internal heat generation, and the thermal resistance at the interface, where heat flux continuity holds and a temperature jump occurs. The situation of interest is mathematically modeled, explicit analytical solutions are obtained using Fourier techniques, and a convergent finite-difference scheme is formulated to simulate particular cases. The solution is consistent with previous results. A numerical example is included to demonstrate coherence between the obtained results and the underlying physics of the problem.

## 1. INTRODUCCIÓN

El modelado matemático de problemas de transferencia de calor en materiales multicapa ha sido muy estudiado recientemente debido a las numerosas aplicaciones en diversos campos de la ciencia, ingeniería e industria. La variedad de aplicaciones es evidente en los numerosos artículos encontrados en la literatura en diferentes campos. Por ejemplo: técnicas de limpieza de lana, contaminación en medios porosos, estudio de la permeabilidad de la piel, análisis de liberación de fármacos en stents, estudio de emisiones de gases de efecto invernadero, estudio de la humedad en tejidos compuestos, crecimiento de tumores, conducción de calor a través de la piel, análisis de celdas de ion-litio, microelectrónica, entre otros. Referencias apropiadas a cada uno de estos problemas se pueden ver en [Umbricht et al. \(2025\)](#)

Un estado del arte relevante y actualizado en la transferencia de materiales multicapa y las técnicas matemáticas utilizadas se puede ver en [De Monte \(2000\)](#); [Jain et al. \(2021\)](#). Estos problemas han sido abordados analíticamente por diferentes métodos, entre ellos el método de imágenes recursivas ([Dias, 2015](#)), el método de separación de variables ([Hickson et al., 2009](#); [De Monte, 2000](#); [Rubio et al., 2021](#)), la solución usando funciones integrales ([Rodrigo y Worthy, 2016](#)). También se han utilizado técnicas numéricas, el método de soluciones fundamentales ([Johansson y Lesnic, 2009](#)), diferencias finitas y elementos finitos ([Hickson et al., 2009](#); [Rubio et al., 2021](#)).

La bibliografía sobre problemas de transporte de materiales multicapa carece de generalidad. La mayoría de los artículos citados anteriormente consideran solo la difusión, descuidando términos disipativos y fuentes de la ecuación parabólica completa. Además, la mayoría de ellos no consideran la resistencia ofrecida por la interfaz. Como ejemplo, ver [Jain et al. \(2021\)](#), donde los autores hacen un buen trabajo estudiando un proceso de transferencia de calor en materiales multicapa pero no incluyen en el análisis ni la presencia de fuentes externas ni la resistencia térmica de contacto. Otros artículos consideran problemas de transferencia de calor en materiales multicapa pero solo tienen en cuenta el estado estacionario ([Umbricht et al., 2022a,b](#)).

Es necesario analizar la influencia de la fuente externa, los términos disipativos y la resistencia térmica por contacto, ya que los procesos físicos clave en transferencia calor en materiales multicapa incluyen la difusión, la advección, la generación o consumo interno de calor y la generación de calor debido a fuentes externas. La tasa de generación interna de calor o consumo a menudo se considera proporcional a la temperatura local. Algunos procesos modelados de esta manera son: una reacción química con cinética de primer orden ([Esho et al., 2018](#)), el término de perfusión de la ecuación de biocalor ([Pennes et al., 1948](#)), y la ecuación de aletas ([Becker y Herwing, 2013](#)). El término advectivo es común en varios procesos de transferencia, como en una batería de flujo ([Skylas-Kazacos et al., 2011](#)). Por otro lado, el término fuente es útil para modelar diferentes procesos donde se entrega calor al sistema ([Kim, 2020](#)).

Este trabajo propone una extensión a 2D de [Umbricht et al. \(2025\)](#). Se estudia matemáticamente la transferencia de calor transitoria de un cuerpo bicapa gobernado por una ecuación de Convección-Difusión-Reacción-Fuente (CDRS). Se consideran la difusión, la advección, la generación o pérdida interna de calor, la generación de calor a partir de fuentes externas y la resistencia térmica por contacto ofrecida por la interfaz. Se obtiene una expresión analítica para la solución del problema. Además, el enfoque numérico propuesto tiene como objetivo simular soluciones para estudios de casos específicos utilizando métodos de diferencias finitas.

## 2. MODELADO MATEMÁTICO

Se estudia la transferencia de calor en un cuerpo bicapa bidimensional. Se tiene en cuenta la ganancia o pérdida de calor dentro de cada capa a una tasa proporcional a la temperatura local y la advección impulsada por un flujo bidimensional de fluido. Además, se asume que se genera calor desde fuentes externas. La longitud del cuerpo bicapa es  $x_2$ , la interfaz se encuentra en  $x = x_1$  donde  $x_2 > x_1$  y la altura del cuerpo es  $y = w$ . La ecuación de conservación de energía que representa un equilibrio entre la difusión, la advección, la ganancia o pérdida interna de calor, y la generación de calor a partir de fuentes externas puede escribirse como:

$$\frac{\partial T_m}{\partial t}(x, y, t) = D_m T_m(x, y, t) + s_m(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega_m, \quad (1)$$

donde, para  $m = 1, 2$ ,  $\Omega_m = (x_{m-1}, x_m) \times (0, w) \times \mathbb{R}^+$ , y  $D_m$  es un operador diferencial parabólico utilizado previamente en [Umbricht y Rubio \(2021\)](#), definido como

$$D_m T_m(x, y, t) := \alpha_m \Delta(T_m)(x, y, t) - \beta_m \cdot \nabla(T_m)(x, y, t) + \nu_m T_m(x, y, t), \quad (2)$$

donde

$$\begin{cases} \Delta(T_m)(x, y, t) := \frac{\partial^2 T_m(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_m(x, y, t)}{\partial y^2}, \\ \nabla(T_m)(x, y, t) := \left( \frac{\partial T_m(x, y, t)}{\partial x}, \frac{\partial T_m(x, y, t)}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (3)$$

En las ecuaciones (1)-(3), comúnmente conocidas como la ecuación CDRS, los subíndices denotan la primera y segunda capas de material, y las variables  $x$ ,  $y$  y  $t$  representan las coordenadas espaciales y temporal, respectivamente. Las funciones  $T_1(x, y, t)$  y  $T_2(x, y, t)$ , que satisfacen  $T_1(x, y, t) \in C^2(0, x_1) \times C^2(0, w) \times C^1(0, +\infty)$  y  $T_2(x, y, t) \in C^2(x_1, x_2) \times C^2(0, w) \times C^1(0, +\infty)$ , representan los campos de temperatura en la primera y segunda capas, relativos a la temperatura ambiente en la posición  $(x, y)$  y tiempo  $t$ .

Los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación (2) representan la transferencia de calor por difusión y advección, respectivamente, mientras que el tercer término considera la generación o pérdida interna de calor proporcional a la temperatura local. El coeficiente  $\alpha_m$  denota la difusividad térmica en cada capa,  $\beta_m = (\beta_m^x, \beta_m^y)$  representa el vector de velocidad del flujo, y  $\nu_m$  es el coeficiente asociado a la ganancia o pérdida interna de calor. Finalmente, las funciones diferenciables  $s_m$  en (1) modelan fuentes externas de calor. Se asume que todas las propiedades del material son independientes de la temperatura.

El calor se genera mediante fuentes externas y también por mecanismos internos dentro de cada capa, a una tasa proporcional a la temperatura local. La transferencia de calor ocurre por difusión y advección debido a un flujo de fluido impuesto dirigido de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. Cada capa tiene sus propias propiedades térmicas, velocidad del flujo y características de generación de calor.

Se imponen condiciones generales de frontera convectiva a lo largo de todo el contorno del dominio. Estas condiciones representan un equilibrio entre el intercambio convectivo de calor con el entorno y la difusión y advección internas. Cabe destacar que la advección puede suministrar energía al cuerpo o extraerla hacia el entorno. Las condiciones de frontera se expresan de la siguiente manera ([Umbricht et al., 2025](#)):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = h_A T_1 + \rho_1 C_1 \beta_1^x T_1, & x = 0, \quad y \in (0, w), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = -h_B T_2 + \rho_2 C_2 \beta_2^x T_2, & x = x_2, \quad y \in (0, w), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = h_1 T_1 + \rho_1 C_1 \beta_1^y T_1, & y = 0, \quad x \in (0, x_1), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} = -h_1 T_1 + \rho_1 C_1 \beta_1^y T_1, & y = w, \quad x \in (0, x_1), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = h_2 T_2 + \rho_2 C_2 \beta_2^y T_2, & y = 0, \quad x \in (x_1, x_2), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = -h_2 T_2 + \rho_2 C_2 \beta_2^y T_2, & y = w, \quad x \in (x_1, x_2), \quad t \in \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \quad (4)$$

donde  $\kappa_m$ ,  $h_m$ ,  $\rho_m$  y  $C_m$  representan, respectivamente, la conductividad térmica, el coeficiente de transferencia de calor por convección, la densidad y el calor específico a presión constante para cada capa. También se considera una discontinuidad de temperatura en la interfaz debido a la resistencia térmica de contacto  $R$ , junto con la continuidad del flujo de calor:

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_2 = T_1 + R \frac{\partial T_1}{\partial x}, & x = x_1, \quad y \in (0, w), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} - \rho_2 C_2 \beta_2^x T_2 = \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \rho_1 C_1 \beta_1^x T_1, & x = x_1, \quad y \in (0, w), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ \beta_1^y \alpha_2 = \beta_2^y \alpha_1, & x = x_1, \quad y \in (0, w), \quad t \in \mathbb{R}^+, \end{array} \right. \quad (5)$$

Por último, se imponen dos condiciones iniciales generales:

$$T_m(x, y, t) = T_{m,0}(x, y), \quad x \in [x_{m-1}, x_m], \quad y \in [0, w], \quad t = 0. \quad (6)$$

### 3. SOLUCIÓN ANALÍTICA

El problema de transferencia de calor transitorio a resolver está definido por las ecuaciones (1)-(6). Para simplificar, las ecuaciones se adimensionalizan introduciendo los siguientes parámetros para  $m = 1, 2$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{x} = \frac{x}{x_2}, \quad \bar{y} = \frac{y}{x_2}, \quad \bar{w} = \frac{w}{x_2}, \quad \bar{R} = \frac{R}{x_2}, \quad \tau = \frac{\alpha_2}{x_2^2} t, \quad \theta_m = \frac{T_m}{T_r}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \\ \mathbf{Pe}_m = \frac{x_2}{\alpha_2} \beta_m, \quad \bar{\nu}_m = \frac{x_2^2}{\alpha_2} \nu_m, \quad \bar{s}_m = \frac{x_2^2}{T_r \alpha_2} s_m, \quad \bar{\kappa} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}, \quad Bi_m = \frac{x_2}{\kappa_2} h_m, \\ Bi_A = \frac{x_2}{\kappa_2} h_A, \quad Bi_B = \frac{x_2}{\kappa_2} h_B. \end{array} \right. \quad (7)$$

donde  $\mathbf{Pe}_m = (Pe_m^{\bar{x}}, Pe_m^{\bar{y}})$  y  $Bi_m$  corresponden, respectivamente, a los números adimensionales de Péclet y Biot, y  $T_r$  denota una temperatura de referencia seleccionada. Al aplicar esta transformación adimensional a las ecuaciones (1)-(6), se obtiene la siguiente formulación adimensional del problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \bar{D}_1 \theta_1 + \bar{s}_1, & (\bar{x}, \bar{y}, \tau) \in \bar{\Omega}_1, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} = \bar{D}_2 \theta_2 + \bar{s}_2, & (\bar{x}, \bar{y}, \tau) \in \bar{\Omega}_2, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{x}} = Bi_A^* \theta_1, & \bar{x} = 0, \bar{y} \in (0, \bar{w}), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{x}} = Bi_B^* \theta_2, & \bar{x} = 1, \bar{y} \in (0, \bar{w}), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{y}} = Bi_{1,0}^* \theta_1, & \bar{y} = 0, \bar{x} \in (0, \bar{x}_1), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{y}} = Bi_{1,\bar{w}}^* \theta_1, & \bar{y} = \bar{w}, \bar{x} \in (0, \bar{x}_1), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{y}} = Bi_{2,0}^* \theta_2, & \bar{y} = 0, \bar{x} \in (\bar{x}_1, 1), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{y}} = Bi_{2,\bar{w}}^* \theta_2, & \bar{y} = \bar{w}, \bar{x} \in (\bar{x}_1, 1), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \theta_2 = \theta_1 + \bar{R} \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{x}}, & \bar{x} = \bar{x}_1, \bar{y} \in (0, \bar{w}), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \bar{x}} = \gamma \theta_1 + \sigma \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{x}}, & \bar{x} = \bar{x}_1, \bar{y} \in (0, \bar{w}), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ Pe_1^{\bar{y}} = \bar{\alpha} Pe_2^{\bar{y}}, & \bar{x} = \bar{x}_1, \bar{y} \in (0, \bar{w}), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \theta_1 = \theta_{1,0}, & \bar{x} \in [0, \bar{x}_1], \bar{y} \in [0, \bar{w}], \tau = 0, \\ \theta_2 = \theta_{2,0}, & \bar{x} \in [\bar{x}_1, 1], \bar{y} \in [0, \bar{w}], \tau = 0, \end{array} \right. \quad (8)$$

donde, para  $m = 1, 2$ ;  $\bar{\Omega}_m = (\bar{x}_{m-1}, \bar{x}_m) \times (0, \bar{w}) \times \mathbb{R}^+$  y  $\bar{D}_m$  es el operador diferencial parabólico adimensional definido como sigue:

$$\bar{D}_m \theta_m = \bar{\alpha} \Delta \theta_m - \mathbf{P} \mathbf{e}_m \cdot \nabla \theta_m + \bar{\nu}_m \theta_m, \quad (9)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} Bi_A^* = \frac{Pe_1^{\bar{x}}}{\bar{\alpha}} + \frac{Bi_A}{\bar{\kappa}}, \quad Bi_B^* = Pe_2^{\bar{x}} - Bi_B, \quad Bi_{1,0}^* = \frac{Pe_1^{\bar{y}}}{\bar{\alpha}} + \frac{Bi_1}{\bar{\kappa}}, \quad Bi_{1,\bar{w}}^* = \frac{Pe_1^{\bar{y}}}{\bar{\alpha}} - \frac{Bi_1}{\bar{\kappa}}, \\ Bi_{2,0}^* = Pe_2^{\bar{y}} + Bi_2, \quad Bi_{2,\bar{w}}^* = Pe_2^{\bar{y}} - Bi_2, \quad \gamma = Pe_2^{\bar{x}} - Pe_1^{\bar{x}} \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\alpha}}, \quad \sigma = \bar{\kappa} + \bar{R} Pe_2^{\bar{x}}. \end{array} \right. \quad (10)$$

El término advectivo puede eliminarse de la ecuación (9). Para ello, se utiliza,

$$\theta_m = \exp(\chi_m \cdot (\bar{x}, \bar{y})) \Theta_m, \quad (\bar{x}, \bar{y}, \tau) \in [\bar{x}_{m-1}, \bar{x}_m] \times [0, \bar{w}] \times \mathbb{R}^+, \quad (11)$$

donde

$$\chi_1 = \frac{1}{2\bar{\alpha}} \mathbf{P} \mathbf{e}_1, \quad \chi_2 = \frac{1}{2} \mathbf{P} \mathbf{e}_2, \quad (12)$$

El cambio de variables (11)-(12) se utiliza en (8)-(10), dando lugar al siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} = \bar{\alpha} \Delta \Theta_1 + \psi_1 \Theta_1 + \widehat{s}_1, & (\bar{x}, \bar{y}, \tau) \in \bar{\Omega}_1, \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau} = \Delta \Theta_2 + \psi_2 \Theta_2 + \widehat{s}_2, & (\bar{x}, \bar{y}, \tau) \in \bar{\Omega}_2, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial \bar{x}} = \bar{B}i_A \Theta_1, & \bar{x} = 0, \bar{y} \in (0, \bar{w}), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial \bar{x}} = \bar{B}i_B \Theta_2, & \bar{x} = 1, \bar{y} \in (0, \bar{w}), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial \bar{y}} = \bar{B}i_{1,0} \Theta_1, & \bar{y} = 0, \bar{x} \in (0, \bar{x}_1), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial \bar{y}} = \bar{B}i_{1,\bar{w}} \Theta_1, & \bar{y} = \bar{w}, \bar{x} \in (0, \bar{x}_1), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial \bar{y}} = \bar{B}i_{2,0} \Theta_2, & \bar{y} = 0, \bar{x} \in (\bar{x}_1, 1), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial \bar{y}} = \bar{B}i_{2,\bar{w}} \Theta_2, & \bar{y} = \bar{w}, \bar{x} \in (\bar{x}_1, 1), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \Theta_2 = \phi \Theta_1 + \mu \frac{\partial \Theta_1}{\partial \bar{x}}, & \bar{x} = \bar{x}_1, \bar{y} \in (0, \bar{w}), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial \bar{x}} = \eta \Theta_1 + \varphi \frac{\partial \Theta_1}{\partial \bar{x}}, & \bar{x} = \bar{x}_1, \bar{y} \in (0, \bar{w}), \tau \in \mathbb{R}^+, \\ \Theta_1 = \Theta_{1,0}, & \bar{x} \in [0, \bar{x}_1], \bar{y} \in [0, \bar{w}], \tau = 0, \\ \Theta_2 = \Theta_{2,0}, & \bar{x} \in [\bar{x}_1, 1], \bar{y} \in [0, \bar{w}], \tau = 0, \end{array} \right. \quad (13)$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = \bar{\nu}_1 - \bar{\alpha} \|\chi_1\|^2, \quad \psi_2 = \bar{\nu}_2 - \|\chi_2\|^2, \quad \widehat{s}_1 = \bar{s}_1 \exp(-\chi_1 \cdot (\bar{x}, \bar{y})), \\ \widehat{s}_2 = \bar{s}_2 \exp(-\chi_2 \cdot (\bar{x}, \bar{y})), \quad \bar{B}i_A = Bi_A^* - \chi_1^{\bar{x}}, \quad \bar{B}i_B = Bi_B^* - \chi_2^{\bar{x}}, \\ \bar{B}i_{1,0} = Bi_{1,0}^* - \chi_1^{\bar{y}}, \quad \bar{B}i_{1,\bar{w}} = Bi_{1,\bar{w}}^* - \chi_1^{\bar{y}}, \quad \bar{B}i_{2,0} = Bi_{2,0}^* - \chi_2^{\bar{y}}, \\ \bar{B}i_{2,\bar{w}} = Bi_{2,\bar{w}}^* - \chi_2^{\bar{y}} \quad \phi = \delta \xi, \quad \mu = \bar{R} \xi, \quad \eta = \xi (\gamma + \sigma \chi_1^{\bar{x}} - \delta \chi_2^{\bar{x}}), \\ \varphi = \xi (\sigma - \bar{R} \chi_2^{\bar{x}}), \quad \delta = 1 + \bar{R} \chi_1^{\bar{x}}, \quad \xi = \exp\left(\frac{1}{2} \bar{x}_1 (\chi_1^{\bar{x}} - \chi_2^{\bar{x}})\right), \\ \Theta_{1,0} = \theta_{1,0} \exp(-\chi_1 \cdot (\bar{x}, \bar{y})), \quad \Theta_{2,0} = \theta_{2,0} \exp(-\chi_2 \cdot (\bar{x}, \bar{y})). \end{array} \right. \quad (14)$$

Se examina sistema homogéneo asociado a las ecuaciones (13)-(14). Este sistema se aborda utilizando el método de separación de variables. Con ese fin, se asume la existencia de funciones  $f_{1,n,p} \in C^2(0, \bar{x}_1)$ ,  $f_{2,n,p} \in C^2(\bar{x}_1, 1)$ ,  $u_{1,p} \in C^2(0, \bar{w})$ ,  $u_{2,p} \in C^2(0, \bar{w})$  y  $g_{n,p} \in C^1(0, +\infty)$  que satisfacen la siguiente relación:

$$\Theta_m^H(\bar{x}, \bar{y}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} f_{m,n,p}(\bar{x}) u_{m,p}(\bar{y}) g_{n,p}(\tau), \quad (\bar{x}, \bar{y}, \tau) \in \bar{\Omega}_m. \quad (15)$$

Al sustituir la expresión (15) en el sistema homogéneo derivado de las ecuaciones (13)-(14), se obtiene que la componente temporal satisface  $g_{n,p}(\tau) = K_{n,p} \exp(-\lambda_{n,p}^2 \tau)$ , donde  $\lambda_{n,p}$  son los valores propios temporales correspondientes y  $K_{n,p}$  denota una secuencia determinada por

la distribución inicial de temperatura. Además, las funciones espaciales  $f_{m,n,p}$  y  $u_{m,p}$ , para  $m = 1, 2$ , cumplen las siguientes condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\alpha} (f_1'' u_1 + f_1 u_1'') + \psi_1 f_1 u_1 = -\lambda^2 f_1 u_1, & (\bar{x}, \bar{y}) \in (0, \bar{x}_1) \times (0, \bar{w}), \\ f_2'' u_2 + f_2 u_2'' + \psi_2 f_2 u_2 = -\lambda^2 f_2 u_2, & (\bar{x}, \bar{y}) \in (\bar{x}_1, 1) \times (0, \bar{w}), \\ f_1' = \bar{B}i_A f_1, & \bar{x} = 0, \\ f_2' = \bar{B}i_B f_2, & \bar{x} = 1, \\ u_1' = \bar{B}i_{1,0} u_1, & \bar{y} = 0, \\ u_1' = \bar{B}i_{1,\bar{w}} u_1, & \bar{y} = \bar{w}, \\ u_2' = \bar{B}i_{2,0} u_2, & \bar{y} = 0, \\ u_2' = \bar{B}i_{2,\bar{w}} u_2, & \bar{y} = \bar{w}, \\ f_2 = \bar{\phi} f_1 + \bar{\mu} f_1', & \bar{x} = \bar{x}_1, \quad \bar{y} \in (0, \bar{w}), \\ f_2' = \bar{\eta} f_1 + \bar{\varphi} f_1', & \bar{x} = \bar{x}_1, \quad \bar{y} \in (0, \bar{w}), \end{array} \right. \quad (16)$$

además,

$$\bar{\phi} = \frac{\phi}{q}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{q}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{q}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{q}, \quad (17)$$

donde  $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  se define tal que  $u_2(\bar{y}) = q u_1(\bar{y})$ ,  $\forall \bar{y} \in (0, \bar{w})$ . El sistema acoplado (16) se analiza entonces bajo la suposición de una solución no trivial, lo que conduce al siguiente resultado:

$$u_{m,p}(\bar{y}) = A_{m,p} \cos(\epsilon_{m,p} \bar{y}) + B_{m,p} \sin(\epsilon_{m,p} \bar{y}), \quad \bar{y} \in [0, \bar{w}], \quad (18)$$

donde  $A_{1,p} = A_{2,p} = 1$ ,  $B_{1,p} = \frac{\bar{B}i_{1,0}}{\epsilon_{1,p}}$  y  $B_{2,p} = \frac{\bar{B}i_{2,0}}{\epsilon_{2,p}}$ . Los parámetros  $\epsilon_{1,p}$  y  $\epsilon_{2,p}$  representan los valores propios espaciales en la dirección  $y$  para la primera y segunda capas, respectivamente. Estos valores son las infinitas soluciones de las siguientes ecuaciones de autovalores:

$$\tan(\epsilon_{1,p} \bar{w}) = \frac{\epsilon_{1,p}(\bar{B}i_{1,0} - \bar{B}i_{1,\bar{w}})}{\epsilon_{1,p}^2 + \bar{B}i_{1,0} \bar{B}i_{1,\bar{w}}}, \quad \tan(\epsilon_{2,p} \bar{w}) = \frac{\epsilon_{2,p}(\bar{B}i_{2,0} - \bar{B}i_{2,\bar{w}})}{\epsilon_{2,p}^2 + \bar{B}i_{2,0} \bar{B}i_{2,\bar{w}}}. \quad (19)$$

Análogamente, se tiene que:

$$f_{m,n,p}(\bar{x}) = A_{m,n,p} \cos(\omega_{m,n,p} \bar{x}) + B_{m,n,p} \sin(\omega_{m,n,p} \bar{x}), \quad \bar{x} \in [\bar{x}_{m-1}, \bar{x}_m], \quad (20)$$

donde  $A_{1,n,p} = 1$ ,  $B_{1,n,p} = \frac{\bar{B}i_A}{\omega_{1,n,p}}$  y

$$A_{2,n,p} = \frac{\sin(\omega_{1,n,p} \bar{x}_1)}{\cos(\omega_{2,n,p} \bar{x}_1)} \left( \bar{\phi} \frac{\bar{B}i_A}{\omega_{1,n,p}} - \bar{\mu} \omega_{1,n,p} \right) + \frac{\cos(\omega_{1,n,p} \bar{x}_1)}{\cos(\omega_{2,n,p} \bar{x}_1)} (\bar{\phi} + \bar{\mu} \bar{B}i_A) - \tan(\omega_{2,n,p} \bar{x}_1) B_{2,n,p} \quad (21)$$

$$B_{2,n,p} = \sin(\omega_{2,n,p} \bar{x}_1) \left[ \sin(\omega_{1,n,p} \bar{x}_1) \left( \bar{\phi} \frac{\bar{B}i_A}{\omega_{1,n,p}} - \bar{\mu} \omega_{1,n,p} \right) + \cos(\omega_{1,n,p} \bar{x}_1) (\bar{\phi} + \bar{\mu} \bar{B}i_A) \right] \\ + \frac{\cos(\omega_{2,n,p} \bar{x}_1)}{\omega_{2,n,p}} \left[ \sin(\omega_{1,n,p} \bar{x}_1) \left( \bar{\eta} \frac{\bar{B}i_A}{\omega_{1,n,p}} - \bar{\varphi} \omega_{1,n,p} \right) + \cos(\omega_{1,n,p} \bar{x}_1) (\bar{\eta} + \bar{\varphi} \bar{B}i_A) \right]. \quad (22)$$



Los parámetros  $\omega_{1,n,p}$  y  $\omega_{2,n,p}$  representan los valores propios espaciales en la dirección  $x$  para la primera y segunda capas, respectivamente, y se definen a partir de:

$$\begin{cases} \omega_{1,n,p} = \omega_{1,n,p}(\lambda_{n,p}, \epsilon_{1,p}) = \sqrt{\frac{\lambda_{n,p}^2 + \psi_1}{\bar{\alpha}}} - \epsilon_{1,p}^2, \\ \omega_{2,n,p} = \omega_{2,n,p}(\lambda_{n,p}, \epsilon_{2,p}) = \sqrt{\lambda_{n,p}^2 + \psi_2 - \epsilon_{2,p}^2}, \end{cases} \quad (23)$$

estos valores son las soluciones infinitas de las siguientes ecuaciones de autovalores:

$$\tan(\omega_{2,n,p}) = \frac{\omega_{2,n,p} B_{2,n,p} - \bar{B}i_B A_{2,n,p}}{\bar{B}i_B B_{2,n,p} + \omega_{2,n,p} A_{2,n,p}}. \quad (24)$$

Por último, para resolver el sistema no homogéneo definido por (13)-(14), se emplea el método de Fourier sobre la solución del problema homogéneo planteado en (15).

#### 4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

Se propone un enfoque explícito de diferencias finitas de segundo orden hacia adelante en el tiempo y centrado en las variables espaciales. Para llevar a cabo el ejemplo numérico, se programa un esquema en Matlab. Se asume que el fluido disipativo es aire a presión normal. Los coeficientes de transferencia de calor por convección  $h_A$ ,  $h_B$ ,  $h_1$  y  $h_2$  se determinan según [Umbrecht et al. \(2020\)](#). Se considera un ejemplo específico para el que se suponen los siguientes parámetros:  $x_2 = 1\text{ m}$ ,  $x_1 = 0,4\text{ m}$ ,  $t_\infty = 10800\text{ s} = 3\text{ h}$ ,  $\beta_1 = (0,02\text{ m/s}, 0,02\text{ m/s})$ ,  $\beta_2 = \left(0,02\text{ m/s}, 0,02\text{ m/s} \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = -0,0003\text{ 1/s}$ ,  $R = 0,05\text{ m}$ . La condición inicial es nula y la fuente de generación de calor  $s(x, t)$  esta dada por:

$$\begin{cases} s_1(x, y, t) = \frac{100}{x_1 w t_\infty^2} \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}} x (x_1 - x) y (w - y) t (t_\infty - t), \\ s_2(x, y, t) = \frac{100}{(x_2 - x_1) w t_\infty^2} \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}} (x - x_1) (x_2 - x) y (w - y) t (t_\infty - t). \end{cases} \quad (25)$$

Las Figura 1 muestra las distribución de temperatura en  $t = 1,5\text{ h}$  para el material bicapa  $Pb - Fe$ . El perfil de temperatura exhibe una forma que refleja estrechamente la del término fuente, ya que este constituye el principal aporte de calor al sistema.

Las Figuras 2 presenta la evolución espacio-temporal de la temperatura en  $y = 0,5\text{ m}$  para un material compuesto  $Pb - Fe$ . Se observa claramente una discontinuidad de temperatura en  $x = 0,4\text{ m}$ , la cual se vuelve más pronunciada alrededor de  $t = 1,5\text{ h}$ .

#### 5. CONCLUSIONES

Este artículo presenta un análisis teórico de un problema de transferencia de calor bidimensional en dos capas con difusión, advección, generación o pérdida interna de calor linealmente dependiente de la temperatura en cada capa, y generación de calor debido a fuentes externas. Además, se considera la resistencia térmica ofrecida por la interfaz entre los materiales. Se obtiene una expresión analítica para la solución del problema estudiado. Adicionalmente, se propone un enfoque de diferencias finitas convergente, que permite simular numéricamente soluciones para estudios de casos particulares. Tanto los resultados analíticos como los numéricos son consistentes con hallazgos previos y con la física del problema. El método numérico propuesto actúa como un complemento que no solo respalda los resultados analíticos, sino que



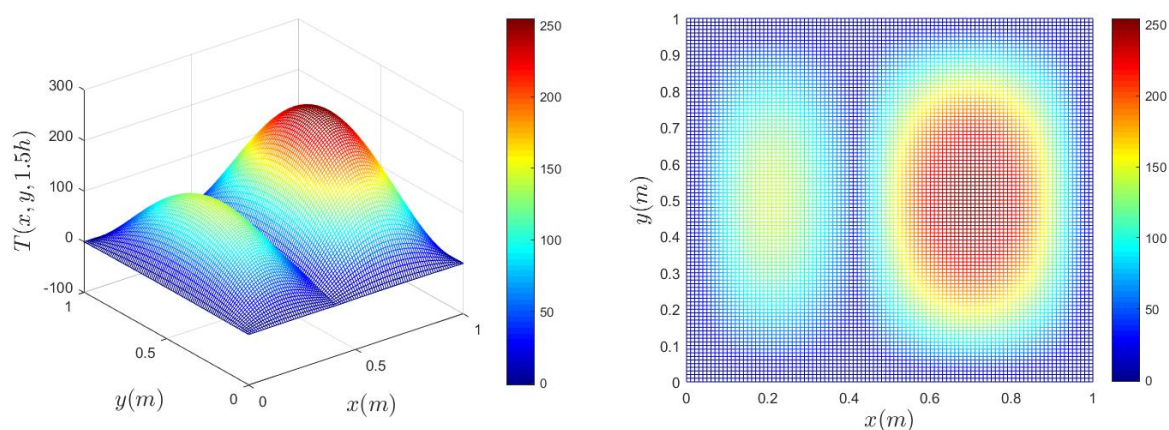


Figura 1: Distribución de Temperatura sobre un cuerpo de  $Pb - Fe$  en  $t = 1.5 h$ .

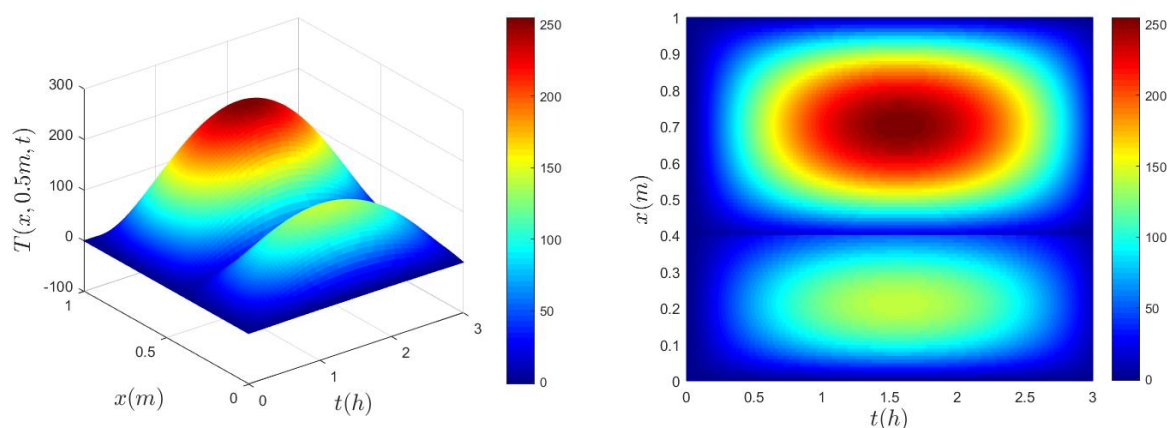


Figura 2: Distribución de Temperatura sobre un cuerpo de  $Pb - Fe$  en  $y = 0.5 m$ .

también constituye una base flexible para abordar extensiones del problema, como geometrías más complejas, propiedades dependientes de la temperatura o análisis inversos, en las que la deducción de soluciones cerradas no es factible.

En resumen, este estudio ofrece un punto de referencia analítico y un enfoque numérico fiable para modelar problemas de transferencia de calor multicapa con resistencia interfacial y fuentes internas. La metodología puede extenderse a configuraciones de materiales más complejas o aplicarse en tareas de análisis inverso, como la identificación de parámetros. Futuros trabajos podrían considerar el desarrollo de esquemas computacionales paralelos o la integración de propiedades de materiales dependientes de la temperatura para una mayor fidelidad física.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos 006-25CI2002 y 006-24CI1904 de la Universidad Austral, Rosario, Argentina.

## REFERENCIAS

Becker S. y Herwing H. One dimensional transient heat conduction in segmented fin-like geometries with distinct discrete peripheral convection. *Int. J. Therm. Sci.*, 71:148–162, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2013.04.004>.

- De Monte F. Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. a 'natural' analytic approach. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 43(19):3607–3619, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(00\)00008-9](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(00)00008-9).
- Dias C. A method of recursive images to solve transient heat diffusion in multilayer materials. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 85:1075–1083, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.12.033>.
- Esho I., Shah K., y Jain A. Measurements and modeling to determine the critical temperature for preventing thermal runaway in li-ion cells. *Appl. Therm. Eng.*, 145:287–294, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2018.09.016>.
- Hickson R., Barry S., y Mercer G. Critical times in multilayer diffusion. part 1: exact solutions. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 52:5776–5783, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.08.013>.
- Jain A., Zhou L., y Parhizi M. Multilayer one-dimensional convection-diffusion-reaction (cdr) problem: Analytical solution and imaginary eigenvalue analysis. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 177:121465, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121465>.
- Johansson B. y Lesnic D. A method of fundamental solutions for transient heat conduction in layered materials. *Eng. Anal. Boundary Elem.*, 33(12):1362–1367, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2009.04.014>.
- Kim A. Complete analytic solutions for convection-diffusion-reaction-source equations without using an inverse laplace transform. *Sci. Rep.*, 10:8040, 2020. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-63982-w>.
- Pennes H., Shah K., y Jain A. Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm. *J. Appl. Phys.*, 1(2):93–122, 1948. <https://doi.org/10.1152/jappl.1948.1.2.93>.
- Rodrigo M. y Worthy A. Solution of multilayer diffusion problems via the laplace transform. *J. Math. Anal. Appl.*, 444(1):475–502, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.042>.
- Rubio D., Tarzia D., y Umbricht G. Heat transfer process with solid-solid interface: Analytical and numerical solutions. *WSEAS trans. Math.*, 20:404–414, 2021. <https://doi.org/10.37394/23206.2021.20.42>.
- Skyllas-Kazacos M., Chakrabarti M., Hajimolana S., Mjalli F., y Saleem M. Progress in flow battery research and development. *J. Electrochem. Soc.*, 158(8):R55–R79, 2011. <https://doi.org/10.1149/1.3599565>.
- Umbricht G. y Rubio D. Optimal estimation of thermal diffusivity in an energy transfer problem. *WSEAS trans. Fluid Mech.*, 16:222–231, 2021. <https://doi.org/10.37394/232013.2021.16.21>.
- Umbricht G., Rubio D., Echarri R., y Hasi C.E. A technique to estimate the transient coefficient of heat transfer by convection. *Lat. Am. Appl. Res.*, 50(3):229–234, 2020. <https://doi.org/10.52292/j.laar.2020.179>.
- Umbricht G., Rubio D., y Tarzia D. Determination of thermal conductivities in multilayer materials. *WSEAS trans. Heat Mass Transfer*, 17:188–195, 2022a. <https://doi.org/10.37394/232012.2022.17.20>.
- Umbricht G., Rubio D., y Tarzia D. Bilayer one-dimensional convection–diffusion–reaction–source problem: Analytical and numerical solution. *Int. J. Therm. Sci.*, 208(1):109471, 2025. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2024.109471>.
- Umbricht G., Tarzia D., y Rubio D. Determination of two homogeneous materials in a bar with solid-solid interface. *Math. Modell. Eng. problem*, 9(3):568–576, 2022b. <https://doi.org/10.18280/mmep.090302>.