

## MODELO PARA LA EVALUACIÓN DE LAS PROPIEDADES DINÁMICAS DE VIGUETAS PRETENSADAS

### MODEL FOR THE EVALUATION OF THE DYNAMIC PROPERTIES OF PRESTRESSED BEAMS

Liz G. Nallim<sup>a,b</sup>, Mario W. Toledo<sup>b</sup>, Sergio Oller<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Ingeniería Civil y Medio Ambiente de Salta (ICMASa), Facultad de Ingeniería,  
Universidad Nacional de Salta (UNSa), Avda. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina,  
icmasa@unsa.edu.ar, <http://www.ing.unsa.edu.ar/produccion-cientifica/investigacion/icmasa>*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional de Salta (UNSa), Avda. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina,  
info@ing.unsa.edu.ar, <http://www.ing.unsa.edu.ar/>*

**Palabras clave:** Vigueta Pretensada, Material Compuesto, Dinámica, Daño.

**Resumen.** El presente trabajo propone un modelo para la evaluación de las propiedades dinámicas de viguetas pretensadas, centrándose en el análisis de la variación la frecuencia de vibración con la evolución del daño. Es fundamental comprender cómo las viguetas varían su respuesta dinámica para garantizar su adecuado desempeño y analizar la serviciabilidad. El modelo propuesto se basa en la combinación de técnicas propias de la resistencia de materiales con la mecánica del daño continuo y cálculos clásicos de dinámica estructural, para obtener las propiedades de vibración de viguetas pretensadas. Se abordan aspectos como la determinación del centro mecánico, rigidez mecánica y la evolución de éstos con el daño que crece a medida que se incrementa la carga en un ensayo a flexión en 3 (tres) puntos. Los resultados obtenidos con el modelo son comparados con resultados experimentales que se llevan a cabo sometiendo las viguetas a diferentes escenarios de daño. Se espera que este enfoque contribuya al desarrollo de estrategias de diseño más precisas, que a la vez sean de fácil aplicación, y que resulten eficientes para la evaluación de las propiedades dinámicas de viguetas y su optimización en análisis específicos.

**Keywords:** Prestressed beam, Composite Material, Dynamics, Damage.

**Abstract.** The present work proposes a model for evaluating the dynamic properties of prestressed beams, focusing on the analysis of vibration frequency variation with the evolution of damage. It is essential to understand how their dynamic response varies to guarantee adequate performance and analyze their structural serviceability. The proposed model combines material resistance techniques with continuous damage mechanics and classic structural dynamics calculations. It characterizes the vibration properties of prestressed beams, addressing aspects such as the determination of the mechanical center, mechanical rigidity, and their evolution with damage during a 3-point bending test. The results obtained from the model are compared with experimental results obtained by subjecting the beams to different damage scenarios. It is expected that this approach will contribute to the development of more precise design strategies that are easy to apply and efficient for analyzing beams' dynamic properties and optimizing them in specific scenarios.

## 1 INTRODUCCIÓN

Las frecuencias naturales de componentes estructurales pretensadas son de sumo interés, particularmente en el diseño de puentes y de torres de turbinas de viento. En virtud de que la capacidad de servicio y la seguridad de los elementos de hormigón armado pretensado (H<sup>o</sup>P<sup>o</sup>) dependen del estado de daño, es muy útil el desarrollo de herramientas y procedimientos capaces de estimar la degradación de las propiedades, así como analizar la evolución del daño local y global. Entre otros procedimientos relevantes, la identificación dinámica ha demostrado ser un método económico, rápido y fiable para evaluar la integridad estructural.

El efecto de la fuerza de pretensado aplicada sobre el comportamiento dinámico de estructuras de H<sup>o</sup>P<sup>o</sup> es un tópico ampliamente debatido. Algunos autores sostienen que las frecuencias naturales de vibración de vigas de H<sup>o</sup>P<sup>o</sup> tienden a disminuir a medida que aumenta la magnitud de la fuerza de pretensado (ver, por ejemplo, Chan et al. 2000, Law et al. 2005, Dai et al. 2007, Xiong and Zhang, 2009). Con el fin de predecir este comportamiento, se formularon modelos entre los que se pueden mencionar Chan and Yung (2000) y Law and Lu (2005). Otros autores sugieren que las frecuencias de las estructuras de H<sup>o</sup>P<sup>o</sup> no se ven afectadas por la magnitud de la fuerza de pretensado, entre los mayores referentes se menciona a Hamed and Frostig (2006). Se desarrollaron diversas investigaciones que emplean modelos numéricos a fin de simular el comportamiento dinámico de las vigas de H<sup>o</sup>P<sup>o</sup>. Algunas propuestas (Chan and Yung, 2000, Kim et al. 2004, Bonopera et al. 2021) presentan trabajos analíticos sobre vigas de H<sup>o</sup>P<sup>o</sup> no fisuradas, en tanto que otros modelos (Limongelli et al. 2016, Gan et al. 2019, Luna Vera et al. 2020) trabajaron sobre vigas fisuradas a fin de evaluar la influencia de la variación de las frecuencias naturales en el comportamiento.

En este trabajo se presenta el desarrollo de un modelo que permite simular el comportamiento mecánico de viguetas pretensadas, tanto en el campo lineal como no lineal con daño a tracción en el hormigón obteniendo la variación de las frecuencias naturales con la evolución del daño. El modelo propuesto se basa en la combinación de técnicas propias de la resistencia de materiales con la mecánica del daño continuo y cálculos clásicos de dinámica estructural, para obtener las propiedades de vibración de viguetas pretensadas.

## 2 MODELO MECÁNICO ESTRUCTURAL

### 2.1 Descripción general del modelo

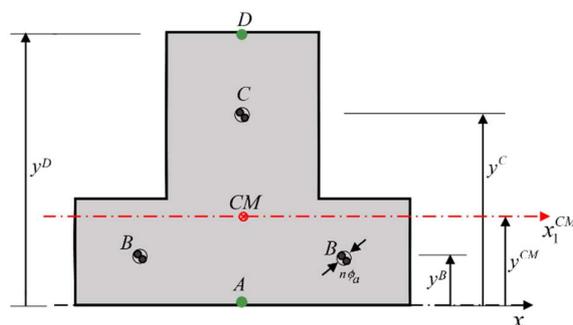


Figura 1: Esquema de la sección transversal de una viga tipo

Se considera una viga reforzada con 3 cordones de acero activo, cada uno constituido por  $n$  alambres diámetro  $\phi_a$ . El esquema geométrico simplificado, de la sección transversal de la viga tipo, que se utiliza en desarrollo del modelo, se muestra en la Figura 1. El área total de

la sección transversal de la vigueta se designa como  $A_T$  y el área de los cordones como  $A_a$ . Los puntos de control se designan en la Figura 1 como  $A$  y  $D$  ubicados en las fibras más alejadas inferior y superior (hormigón) respectivamente, y los puntos  $B$  y  $C$  localizados en correspondencia con los cordones de acero. A cada cordón de pretensado de la vigueta se le aplica una fuerza de tesado  $N_a$ . Las hipótesis del modelo suponen que al cortar los cordones (momento de transferencia) el mortero de la vigueta está perfectamente fraguado y se considera compatibilidad cinemática perfecta entre los cordones y el mortero.

## 2.2 Propiedades geométricas y mecánicas de la sección transversal de la vigueta

La sección total de acero activo considerando 3 cordones de pretensado (ver Figura 1) y la sección de hormigón se determinan, respectivamente, mediante las siguientes expresiones

$$A_a^{(3)} = 3A_a = 3(n\phi_a^2 / 4) \quad A_h = A_T - A_a^{(3)} \quad (1)$$

donde  $A_a$  es el área de cada cordón de acero y  $A_h$  es el área neta de hormigón de la sección transversal.

El área mecánica de la vigueta se obtiene considerando el material compuesto en la sección,

$$A_M = (E_h A_h) + (E_a A_a^{(3)}) \quad (2)$$

donde  $E_h, E_a$  son los módulos de elasticidad del hormigón y del acero respectivamente.

La posición del Centro Mecánico de la vigueta ( $CM$ ) se determina teniendo en cuenta la simetría de la sección transversal. Por lo que sólo se determina la ordenada  $y^{CM}$ ,

$$y^{CM} = \sum_i E_i A_i y_i^{CG} / A_M \quad (3)$$

donde  $A_i$  es el área de la sección transversal y  $y_i^{CG}$  es la posición del centro geométrico para cada material que integra la sección transversal de la vigueta ( $i = h, a$ ).

De manera análoga se obtiene el Momento de Inercia Mecánico  $I_{CM}$  respecto al eje mecánico  $x_1^{CM}$  (ver Figura 1)

$$I_{CM} = \sum_i I_{CM}^{(i)} = \sum_i E_i I_{x_1^{CM}}^{(i)} \quad (4)$$

donde  $I_{CM}^{(i)}$  e  $I_{x_1^{CM}}^{(i)}$  (con  $i = h, a$ ) son, respectivamente, el Momento de Inercia Mecánico y el Momento de Inercia Axial de cada material contenido en la sección transversal respecto al eje mecánico  $x_1^{CM}$  (Oller y Nallim, 2020).

## 2.3 Deformaciones y tensiones provocadas por el pretensado

La deformación longitudinal impuesta en cada cordón (constituido por 2 alambres cada uno) está dada por

$$\varepsilon_a = N_a / (E_a \cdot A_a); \quad \sigma_a = E_a \varepsilon_a \quad (5)$$

Las excentricidades de los cordones, ubicados en los puntos B y C, pueden ser calculadas utilizando la ordenada del centro mecánico determinada mediante la Ec. (3) y las ordenadas que definen la ubicación de los cordones,

$$e_a^B = y^B - y^{CM} \quad e_a^C = y^C - y^{CM} \quad (6)$$

Por otra parte, las ordenadas de los puntos de control, medidas respecto al eje mecánico principal de la sección de la vigueta  $x_1^{CM}$  se obtienen como sigue

$$y_A^{CM} = -y^{CM}, \quad y_B^{CM} = y^B - y^{CM}, \quad y_C^{CM} = y^C - y^{CM}, \quad y_D^{CM} = y^D - y^{CM} \quad (7)$$

Para obtener las tensiones se emplea la metodología e hipótesis descritas en Oller y Nallim (2020). Los esfuerzos estáticamente equivalentes debidos a la acción de la pretensión en los cordones de acero se muestran en la Figura 2.

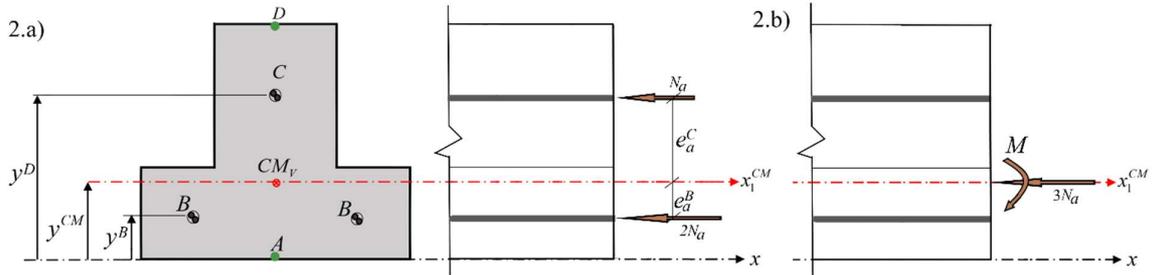


Figura 2. 2.a) Fuerzas resultantes por la pretensión de los cordones, 2.b) Sistema estáticamente equivalente.

Las tensiones por el esfuerzo normal y por flexión para el material  $i$ -ésimo para cada punto de control ( $j$ ), están dadas respectivamente por

$$\sigma_i^{(N)} = \frac{N}{A_M} E_i, \quad \sigma_{ji}^{(M)} = \frac{M}{I_{CM}} y_j^{CM} E_i \quad \text{con} \begin{cases} i = h & j = A, D \\ i = a & j = B, C \end{cases} \quad (8)$$

donde  $N = -3N_a$  y  $M = N_a e_a^C + 2N_a e_a^B$ .

Aplicando el principio de superposición resultan las tensiones para el hormigón de la vigueta en los puntos  $A$  y  $D$ , y las pérdidas de tensión en el acero de los cordones ubicados en las posiciones  $B$  y  $C$  debidas al acortamiento de la vigueta.

$$\sigma_{ji} = \sigma_i^{(N)} + \sigma_{ji}^{(M)} \quad \text{con} \begin{cases} i = h & j = A, D \\ i = a & j = B, C \end{cases} \quad (9)$$

Las tensiones finales en el acero activo de los cordones  $B$  y  $C$  están dadas respectivamente por

$$\sigma_{aB}^f = \sigma_a + \sigma_{aB} \quad (10)$$

$$\sigma_{aC}^f = \sigma_a + \sigma_{aC} \quad (11)$$

#### 2.4 Momento equivalente producido por el pretensado

A partir de las tensiones en los cordones de acero obtenidas mediante las Ecs. (10) y (11) se determinan las fuerzas en cada cordón mediante las siguientes expresiones

$$N_C = \sigma_{Ca}^f \cdot A_a, \quad N_B = \sigma_{Ba}^f \cdot A_a \quad (12)$$

Resultando las siguientes expresiones para el esfuerzo normal y el momento flector debido al pretensado, expresados como acciones en el hormigón

$$N_p = -(N_C + 2N_B) \tag{13}$$

$$M_p = N_C \cdot e_a^C + 2N_B \cdot e_a^B \tag{14}$$

Los esfuerzos normales dados por las Ecs. (12) se muestran gráficamente como acciones en el hormigón en la Figura 3a. La Figura 3b muestra los esfuerzos equivalentes, resultantes de estas acciones, a nivel del Centro Mecánico de la vigueta ( $CM$ ).

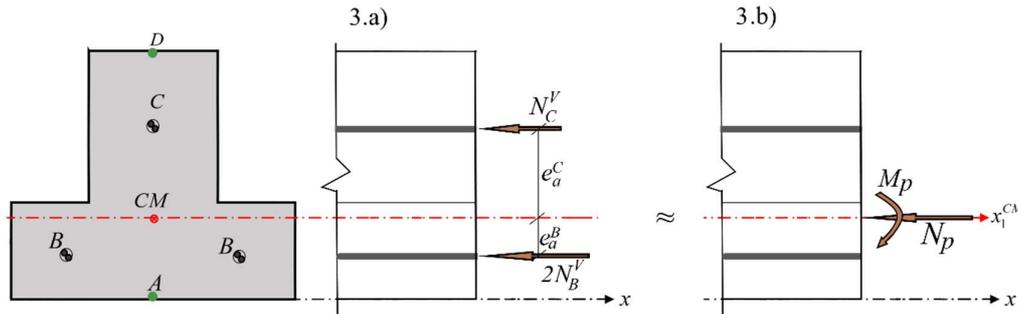


Figura 3: Esfuerzos debidos al pretensado en la sección transversal de la vigueta. 3.a) Acciones de los cordones sobre el hormigón. 3.b) Esfuerzos equivalentes de pretensado sobre la sección transversal.

El momento  $M_p$  debido al pretensado produce una deflexión a lo largo de la viga cuyo valor máximo es  $f_{Mp}$ . Considerado una vigueta simplemente apoyada de luz  $L$ , la flecha en la mitad de la luz producida por el momento flector mencionado está dada por

$$f_{Mp} = M_p L^2 / (8I_{CM}) \tag{15}$$

La flecha producida por el peso propio de la vigueta (sin considerar el pretensado) está dada por

$$f_q = 5qL^4 / (384I_{CM}) \tag{16}$$

donde el peso propio está dado por  $q = \gamma_h A_h + \gamma_a A_a^{(3)}$ , siendo  $\gamma_h$  y  $\gamma_a$ , respectivamente, los pesos específicos del hormigón y del acero de la vigueta.

La flecha total, debida a la acción del tesado y del peso propio, se obtiene aplicando superposición  $f_V = f_{Mp} + f_q$ .

A continuación, se determina el valor de la *rigidez flexional equivalente* que permite considerar la acción del pretensado en la vigueta de una manera ad hoc. Los cálculos posteriores, de la respuesta estructural ante acciones de servicio parten de considerar esta rigidez, la cual se obtiene despejando  $\tilde{I}_{CM}$  de la siguiente expresión

$$f_V = 5qL^4 / (384\tilde{I}_{CM}) \rightarrow \tilde{I}_{CM} = 5qL^4 / (384f_V) \tag{17}$$

### 3 COMPORTAMIENTO NO LINEAL DE LA VIGUETA

#### 3.1 Criterios de daño y plasticidad adoptados

Para el mortero/hormigón se considera la siguiente ley de degradación (Oller y Barbat, 2006)

a partir del instante en que la tensión en el punto de control  $A$  supera la tensión correspondiente al umbral de fisuración,

$$d = 1 - \frac{f_t^h}{\sigma_0} e^{\mathcal{A} \left( 1 - \frac{\sigma_0}{f_t^h} \right)} \quad (18)$$

donde  $\mathcal{A} = \left( \frac{E_h g_f}{(f_t^h)^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1}$ ,  $E^h$  es el módulo elástico inicial del hormigón (mortero),  $f_t^h$  es la

resistencia a la tracción del hormigón de la vigueta,  $\sigma_0$  es la tensión en el punto de control  $A$  ( $= \sigma_{Ah}$ ) para los distintos pasos de carga y  $g_f$  es la magnitud de la energía de fractura.

Para el acero se adopta un comportamiento elasto-plástico perfecto considerando una tensión de fluencia  $f_y$ .

La aplicación de una carga concentrada creciente  $P$  en el centro de la luz produce un proceso no lineal en la vigueta que degrada el material. De esta forma, en los distintos pasos de carga es necesario actualizar los valores del módulo elástico y, por tanto, del área mecánica, posición del centro mecánico y momento de inercia mecánico, que permiten determinar la frecuencia natural de vibración.

### 3.2 Algoritmo del modelo

i) Ingreso de propiedades mecánicas del mortero (hormigón) y de las barras de acero activas:

- Resistencia a tracción y compresión del hormigón  $f_t^h, f_c^h$
- Tensión de fluencia del acero  $f_y$
- Módulo de elasticidad del hormigón  $E_h$  y energía de fractura  $g_f$
- Módulo de elasticidad del acero  $E_a$
- Peso específico del hormigón y del acero  $\gamma_a, \gamma_f$
- Fuerza de tesado  $N_a$

ii) Determinación de  $\mathcal{A}$ ,  $A_h$ ,  $A_a^{(3)}$ ,  $q$  y  $\sigma_a$

iii) Análisis no lineal

iii.a) Inicialización de variables  $\lambda = 0$ ,  $(\sigma_{Ah})_0$ ,  $(\sigma_{Dh})_0$ ,  $(\sigma_{Ba})_0$ ,  $(\sigma_{Ca})_0$

iii.b) Iteración para el incremento de carga  $i = 1, \dots, m$

$$(\sigma_0)_i = (\sigma_{Ah})_{i-1}; \quad (\sigma_{Ba})_i = (\sigma_{Ba})_{i-1}$$

iii.b.1)

Daño en el hormigón

$$\text{if } (\sigma_0)_i < f_t^h \rightarrow (d)_i = 0, \text{ else } (d)_i = 1 - \frac{f_t^h}{(\sigma_0)_i} e^{\mathcal{A} \left( 1 - \frac{(\sigma_0)_i}{f_t^h} \right)}$$

$$(E_h)_i = [1 - (d)_i] E_h$$

Plasticidad en aceros

$$\text{if } (\sigma_{Ba})_i < f_y \rightarrow (\varepsilon_{Ba}^p)_i = 0, \text{ else } \rightarrow (\sigma_{Ba})_i = f_y \text{ y } (\varepsilon_{Ba}^p)_i = \frac{(\sigma_{Ba})_i - f_y}{E_a}$$

$$\left(\varepsilon_{Ba}^e\right)_i = \frac{\left(\sigma_{Ba}^V\right)_i}{E_{aV}} - \left(\varepsilon_{Ba}^p\right)_i$$

- Actualización  $\left(A_M\right)_i, \left(y^{CM}\right)_i, \left(I_{CM}\right)_i, \left(e_a^B\right)_i, \left(e_a^C\right)_i, \left(y_A^{CM}\right)_i, \left(y_B^{CM}\right)_i, \left(y_C^{CM}\right)_i, \left(y_D^{CM}\right)_i$
- Tensiones en los puntos de control por pretensado  $\left(\sigma_{Ah}\right)_i, \left(\sigma_{Dh}\right)_i$
- Pérdidas en los cordones  $\left(\sigma_{Ba}\right)_i, \left(\sigma_{Ca}\right)_i$
- Tensiones finales en los cordones B  $\left(\sigma_{Ba}^f\right)_i$  y C  $\left(\sigma_{Ca}^f\right)_i$
- Fuerza y Momento de pretensado  $\left(N_p\right)_i, \left(M_p\right)_i$
- Flecha por pretensado y peso propio de la vigueta  $\left(f_V^t\right)_i$
- Cálculo del Momento de Inercia Equivalente  $\tilde{I}_{CM}$

iii.b.2) Aplicación de fuerza concentrada en el centro de la luz  $\left(P\right)_i = \lambda \cdot P_{\max}$

- Cálculo de Momento flector y Corte máximos  $\left(M_{\max}\right)_i; \left(Q_{\max}\right)_i$
- Tensiones totales  $\left(\sigma_{Ah}^t\right)_i, \left(\sigma_{Dh}^t\right)_i, \left(\sigma_{Ba}^t\right)_i, \left(\sigma_{Ca}^t\right)_i$
- Actualización de la tensión de referencia  $\left(\sigma_0\right)_i = \left(\sigma_{Ah}^t\right)_i$

iii.b.3) Re-cálculo del daño y la plasticidad  $\left(d\right)_i \rightarrow \left(E_h\right)_i$

iii.b.4) Re-cálculo del área mecánica, centro mecánico, momento de inercia mecánico e inercia mecánica equivalente

iii.b.5) Determinación de la frecuencia natural de vibración

$$\left(\omega\right)_i = \sqrt{3024 \cdot \left(\tilde{I}_{CM}\right)_i \cdot g / \left(31 \cdot L^4 \cdot q\right)}$$

iii.b.6) Re-cálculo de tensiones en los puntos de control, determinación de flechas totales por fabricación, peso propio y carga concentrada

iii.b.7) Actualización de variables  $\left(E_h\right)_{i+1} = \left(E_h\right)_i, \lambda = \lambda + 0.2$

**Vuelve a iii.b)**

FIN

#### 4 EJEMPLO DE APLICACIÓN

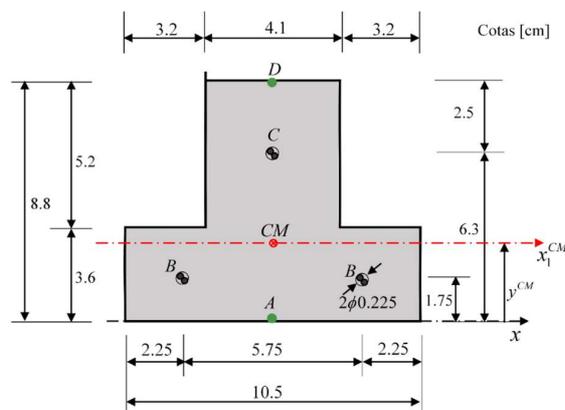


Figura 4: Esquema de la aplicación de la carga en el centro de la luz de la vigueta.

En esta sección se presenta como ejemplo una vigueta simplemente apoyada de  $360\text{cm}$  de longitud, que se somete a una carga creciente en el centro de la luz. La geometría de la vigueta se muestra en la Figura 4, mientras que las propiedades mecánicas de los materiales componentes se presentan en la Tabla 1. La resistencia a tracción del hormigón utilizada para el modelo analítico se determinó durante la realización del ensayo a flexión de la vigueta en 3 (tres) puntos, en el instante que apareció la primera fisura.

Hormigón	Resistencia a compresión	$f_c^h = 14\text{MPa} = 140\text{kg} / \text{cm}^2$
	Resistencia a tracción	$f_t^h = 1.1\text{MPa} = 11\text{kg} / \text{cm}^2$
	Módulo de Elasticidad	$E_h = 22000\text{MPa} = 2.2 \cdot 10^5 \text{kg} / \text{cm}^2$
Acero activo	Tensión de fluencia	$f_y = 2000\text{MPa} = 2 \cdot 10^4 \text{kg} / \text{cm}^2$
	Módulo de Elasticidad	$E_a = 2 \cdot 10^5 \text{MPa} = 2 \cdot 10^6 \text{kg} / \text{cm}^2$

Tabla 1: Propiedades mecánicas de los materiales de la vigueta

Para la determinación de las tensiones en el hormigón y el acero debidas el tesado de las barras se utilizan las Ecs. (10) y (11), resultando para los puntos de control los siguientes valores en unidades técnicas  $[\text{kg} / \text{cm}^2]$

$$\sigma_{Ah} = -63.316, \sigma_{Dh} = -52.048, \sigma_{Ba}^f = 14535.02, \sigma_{Ca}^f = 14587.98$$

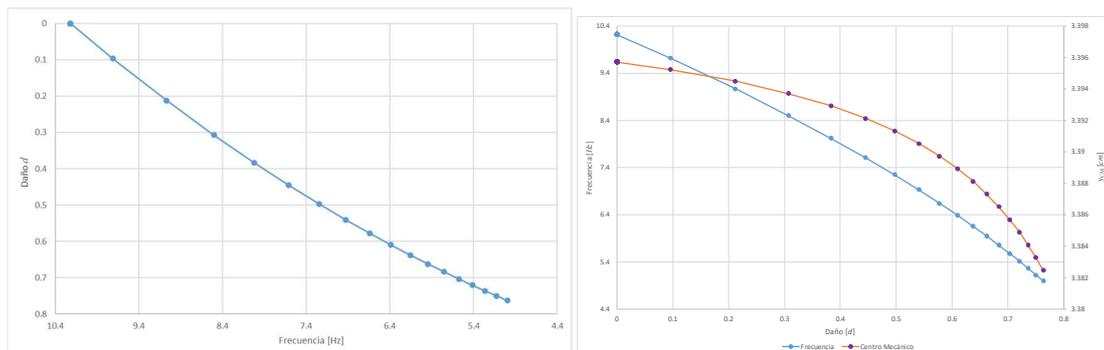


Figura 5: a) Variación de la frecuencia fundamental con el daño, b) Variación de la frecuencia fundamental y la posición del Centro Mecánico con el daño.

En la Figura 5a se presenta la variación de la frecuencia fundamental de vibración libre para diferentes niveles de daño. En la Figura 5b se representa la variación de las frecuencias fundamentales de vibración libre y de la ordenada del Centro Mecánico ( $y^{CM}$ ) en función de la evolución del daño.

## 5 ENSAYOS EXPERIMENTALES

### 5.1 Descripción

El programa experimental incluyó la realización de ensayos estáticos y dinámicos. Los ensayos estáticos se llevan a cabo mediante flexión en 3 puntos incluyendo tres ciclos de carga y descarga crecientes a fin de evaluar la evolución del comportamiento no lineal. Al finalizar cada ciclo de carga estática se llevó a cabo un ensayo dinámico a través de mediciones de la respuesta inducida por martillo, empleando acelerómetros ubicados en el centro y cuarto de la

luz de las viguetas. Se utilizó un equipo K2 kinemetrics (Kinemetrics Inc., 2002) que consta de una registradora digital de doce canales y acelerómetros triaxiales de balance de fuerzas.

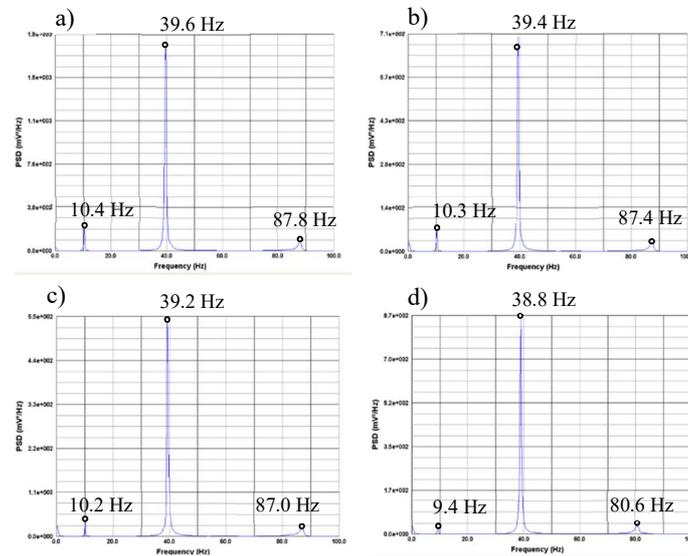


Figura 6: Función Dens. Esp. de Potencia sensor  $\frac{1}{4}$  luz: a) Cond. iniciales, b) 1er Ciclo de carga, c) 2do ciclo de carga, d) 3er ciclo de carga.

El análisis modal, basado en los datos medidos, se llevó a cabo usando la técnica clásica de identificación del parámetro modal Peak-Picking (Ewins, 2000) en el dominio de frecuencias. Se analizó la Densidad Espectral de Potencia (PSD) y se identificaron las frecuencias naturales.

En la Figura 6 se muestran las funciones de Densidad Espectral de Potencia de las mediciones obtenidas por el sensor ubicado en los cuartos de la luz de la vigueta para los diferentes ciclos de carga, incluyendo el estado inicial sin daño. En la Tabla 2 se resumen los resultados experimentales comparados con los analíticos del modelo para la frecuencia fundamental y los diferentes escenarios de daño.

Daño	Frecuencias fundamentales [Hz]	
	Experimentales	Numéricas
$d = 0$	10.4	10.218
$d = 0.05$	10.3	10.113
$d = 0.1$	10.2	9.713
$d = 0.2$	9.4	9.112

Tabla 2: Correlación de frecuencias naturales experimentalmente y numéricas – Daño.

## 6 CONCLUSIONES

En este trabajo se propone un modelo para la evaluación de las propiedades dinámicas de viguetas pretensadas que demuestra ser una herramienta útil para analizar la evolución de las frecuencias naturales de vibración a medida que el daño avanza en las estructuras. Este enfoque combina técnicas de resistencia de materiales con la mecánica del daño continuo y cálculos clásicos de dinámica estructural. Es preciso destacar que la metodología desarrollada es simplificada, por lo que se utiliza la ecuación con rigidez constante para la determinación de la frecuencia fundamental, tomando la inercia degradada en la zona de tracción, por debajo del

eje neutro, a lo largo de todo el dominio continuo. Esta aproximación puede hacerse porque la barra está pretensada, por lo tanto, el daño se inicia en la sección de máximo momento, pero no se localiza y conforme se incrementa la carga continúa distribuyéndose en la zona traccionada de casi todo el dominio. Esto se puede verificar incluso en el ensayo experimental que se ha realizado. Es al final del proceso de carga, situación no alcanzada por este modelo simplificado, cuando se inicia la localización por la cedencia/fluencia plástica del acero de pretensado.

Los principales resultados permiten concluir que el modelo captura adecuadamente la reducción de frecuencias naturales con el daño. Este comportamiento está en consonancia con estudios previos, lo que valida el uso del modelo para predecir la degradación estructural. La comparación entre las frecuencias naturales obtenidas experimentalmente y las calculadas mediante el modelo numérico presenta una buena concordancia, especialmente en los primeros ciclos de carga. Este trabajo sirve de base para realizar análisis paramétricos, analizar la influencia de fuerzas de pretensado y estudios posteriores de forjados.

## REFERENCIAS

- Bonopera, M., Chang, K.C., Lin, T.K., Tullini, N., Influence of prestressing on the behavior of uncracked concrete beams with a parabolic bonded tendon. *Structural Engineering and Mechanics*, 77: 1-17, 2021.
- Chan T., Yung T., A theoretical study of force identification using prestressed concrete bridges. *Engineering Structures* 22:1529–1537, 2000.
- Dai K., Chen S., Vibration of spun-cast prestressed concrete poles. *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics*, Series, 2007.
- Ewins D.J. *Modal testing. Theory, practice and application*. Second Edition Research, (2000).
- Gan, B.Z., Chiew, S.P., Lu, Y., Fung, T.C. The effect of prestressing force on natural frequencies of concrete beams-A numerical validation of existing experiments by modelling shrinkage crack closure. *Journal of Sound and Vibration*. 455: 20–31, 2019.
- Hamed, E., Frostig, Y, Natural frequencies of bonded and unbonded prestressed beams-prestress force effects. *Journal of Sound and Vibration*. 295: 28–39, 2006.
- Kim, J.T., Yun, C.B., Ryu, Y.S., Cho, H.M., Identification of prestress-loss in PSC beams using modal information. *Structural Engineering and Mechanics*., 17: 467–482, 2004.
- Kinematics, *Strong Motion Analyst*. Document 302415. Revision G, 2004.
- Law S. and Lu Z., Time domain responses of a prestressed beam and prestress identification. *Journal of Sound and Vibration*, 288: 1011–1025, 2005.
- Limongelli, M.P., Siegert, D., Merliot, E., Waeytens, J., Bourquin, F., Vidal, R., Le Corvec, V., Gueguen, I., Cottineau, L.M., Damage detection in a post tensioned concrete beam Experimental investigation. *Engineering Structures*. 128: 15–25, 2016,
- Luna Vera, O.S., Oshima, Y., Kim, C.W. Flexural performance correlation with natural bending frequency of post-tensioned concrete beam: Experimental investigation. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*, 10: 135–151, 2020.
- Oller S. and Nallim L., *Estática y Resistencia de Materiales*, bookscimne. 1 URL [https://www.scipedia.com/public/Oller\\_Nallim\\_2020a](https://www.scipedia.com/public/Oller_Nallim_2020a), 2020.
- Oller S., A. H. Barbat, Moment–curvature damage model for bridges subjected to seismic loads. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195: 4490–451, 2006.
- Xiong, H.-X., & Zhang, Y.-T., Theoretical analysis of natural frequency of externally prestressed concrete beam based on rigidity correction. *Academic Journal of Xi'an Jiaotong University*, 21(1): 31–35, 2009.