

ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE BORDES VISCOSOS Y BORDES DE CAPAS PERFECTAMENTE ACOPLADAS

COMPARATIVE STUDY BETWEEN VISCOUS BOUNDARIES AND PERFECTLY MATCHED LAYER BOUNDARIES

Adriano Trono^a, Diego Turello^{a,b}, Federico Pinto^{a,b} y Marcelo A. Ceballos^{a,b}

^aFCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sársfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina.
depeestructuras@fcefyn.unc.edu.ar, <http://www.efn.uncor.edu.ar>

^bInstituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) – CONICET, Universidad
Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sársfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. idit@fcefyn.edu.ar,
<http://www.inv.idit.uncor.edu/>

Palabras clave: Capa perfectamente acoplada (PML), Bordes viscosos estándares, Interacción suelo-estructura.

Resumen. En la modelación de efectos de interacción suelo-estructura es importante considerar de forma adecuada las condiciones de borde absorbentes, para simular la naturaleza infinita del medio que rodea a la estructura. Pero aún existen deficiencias en los bordes absorbentes para representar adecuadamente la radiación de ondas salientes cuando el análisis se realiza en el dominio del tiempo. ABAQUS y PLAXIS disponen de bordes absorbentes viscosos, que son deficientes para absorber ondas de propagación no perpendicular al borde. En este trabajo, se compara el rendimiento de absorción de dichos bordes absorbentes con el de los bordes de capas perfectamente acopladas (PML). Mediante elementos finitos planos, se modela una zapata rígida sometida a diferentes tipos de carga dinámica. Los resultados de utilizar uno u otro borde absorbente se comparan con soluciones de referencia.

Keywords: Perfectly matched layer (PML), Standard viscous boundaries, Soil-structure interaction.

Abstract. In the modeling of soil-structure interaction effects, it is important to adequately consider absorbing boundary conditions to simulate the infinite nature of the medium surrounding the structure. However, there are still deficiencies in absorbing boundaries when representing the radiation of outgoing waves, particularly when the analysis is performed in the time domain. ABAQUS and PLAXIS offer viscous absorbing boundaries, which are inadequate for absorbing waves that propagate at non-perpendicular angles to the boundary. This work compares the absorption performance of these absorbing boundaries with that of perfectly matched layers (PML). Using 2D finite elements, a rigid foundation subjected to different types of dynamic loads is modeled. The results of applying one type of absorbing boundary or the other are compared with reference solutions.

1 INTRODUCCIÓN

En la modelación de efectos de interacción suelo-estructura es importante considerar de forma adecuada las condiciones de borde absorbentes, para simular la naturaleza infinita del medio que rodea a la estructura. Lo frecuente es utilizar las condiciones de borde de campo lejano propuestas por [Zienkiewicz et al \(1989\)](#). Estas condiciones de borde permiten el ingreso y el egreso de ondas al modelo del sitio a través de los bordes viscosos estándares (Standard Viscous Boundary - SVB) propuestos por [Lysmer y Kuhlemeyer \(1969\)](#). Sin embargo, es de común conocimiento que este tipo de bordes tiene deficiencias para absorber ondas superficiales y ondas de cuerpo con incidencia no perpendicular al borde. Y en problemas de dinámica de fundaciones es muy habitual que se propaguen ondas superficiales y ondas de cuerpo en todas las direcciones.

En los últimos 25 años ha habido novedosos desarrollos de herramientas numéricas para modelar la propagación de ondas mecánicas. A principios de este siglo, [Bielak et al. \(2003\)](#) proponen el método de reducción del dominio (Domain Reduction Method – DRM) que permite el ingreso perfecto de cualquier tipo de ondas al modelo del sitio. En el mismo año, [Basu y Chopra \(2003\)](#) proponen un desarrollo de bordes de capas perfectamente acopladas (Perfectly Matched Layer – PML) destinados a absorber ondas elásticas salientes. Estos autores retoman la idea de [Berenger \(1994\)](#) que inventa el concepto PML orientado a la absorción de ondas electromagnéticas.

La combinación de DRM y PML es, en la actualidad, la mejor solución para el adecuado ingreso y egreso de ondas al modelo del sitio. Sin embargo, programas comerciales como ABAQUS y PLAXIS, todavía no han incorporado estas herramientas numéricas. Para casos donde se modelan ondas salientes al modelo del sitio, estos programas siguen ofreciendo al usuario la opción de bordes absorbentes SVB, y en los casos donde se modelan ondas entrantes y salientes, ofrecen la opción de bordes de campo lejano (con SVB). Por este motivo, la mayoría de las modelaciones de interacción dinámica suelo-estructura para el diseño sismorresistente de estructuras de gran importancia todavía se realiza con bordes absorbentes SVB.

Si bien los bordes PML son prácticamente exactos para absorber todo tipo de ondas, pueden ser inestables y costosos computacionalmente. En los últimos años ha habido importantes avances para resolver estos problemas. [Trono et al. \(2022\)](#) proponen una modificación en las funciones de forma de tensión del elemento PML mixto propuesto por [Kucukcoban y Kallivokas \(2013\)](#), disminuyendo considerablemente el costo computacional cuando se consideran solo 3 incógnitas de tensión por elemento. Además, [Trono et al. \(2023\)](#) proponen un desarrollo corregido de la estabilización M-PML (PML con funciones de estiramiento multiaxiales) propuesta por [Meza-Fajardo y Papageorgiou \(2008\)](#) en diferencias finitas y adaptada (“no corregida”) por [Fathi et al. \(2015\)](#) para su utilización en elementos finitos. La opción de [Trono et al. \(2023\)](#) es conocida como M-PML “corregida” y permite que las matrices del sistema sean simétricas.

El objetivo de este trabajo es comparar la eficiencia de los bordes SVB con los bordes PML y M-PML para dilucidar, de alguna manera, si vale la pena o no utilizar bordes absorbentes novedosos en lugar de los bordes habituales SVB. Para ello se utilizan modelos de elementos finitos en deformación plana con diferentes bordes absorbentes, y se comparan las respuestas dinámicas con soluciones de referencia. El análisis se hace tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo.

2 COMPARACIONES EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

1.1 Zapata rígida sobre semi espacio homogéneo

Luco y Westmann (1972) presentan las soluciones analíticas de la rigidez dinámica de una zapata rígida de semi-ancho b y longitud infinita apoyada en un semi espacio homogéneo. Relacionan las fuerzas con los desplazamientos armónicos mediante la matriz de flexibilidad dinámica de la placa rígida y la presentan en función de coeficientes adimensionales:

$$\begin{bmatrix} \Delta_1(a_0) \\ \Delta_2(a_0) \\ b\phi(a_0) \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi G} \begin{bmatrix} C_{HH}(a_0) & 0 & C_{HM}(a_0) \\ 0 & C_{VV}(a_0) & 0 \\ C_{MH}(a_0) & 0 & C_{MM}(a_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ P \\ M/b \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde $a_0 = \omega b/V_s$ es una frecuencia adimensional, G es el módulo de corte del suelo, Δ_1, Δ_2 y ϕ son el desplazamiento horizontal, el desplazamiento vertical y el giro de la zapata, y H, P y M son las amplitudes de la fuerza horizontal, la fuerza vertical y el momento aplicados sobre la zapata. En su trabajo, estos autores presentan la solución de los valores $C_{HH}(a_0), C_{HM}(a_0), C_{VV}(a_0)$ y $C_{MM}(a_0)$ para distintos módulos de Poisson del suelo.

En este trabajo, el semi espacio se modela utilizando un modelo de elementos finitos en deformación plana con bordes PML y bordes SVB (ver Figura 1). El borde PML consiste en una capa de material absorbente en cuyos lados externos se restringen desplazamientos (condiciones esenciales). El tamaño del dominio elegido en el caso con bordes SVB es el mismo que con los bordes PML, sólo que la región de capa absorbente PML es reemplazada por elementos finitos estándares y los bordes SVB son colocados en el extremo donde había condiciones esenciales (ver Figura 1). En ambos casos se utilizan mallas regulares con elementos finitos del mismo tamaño.

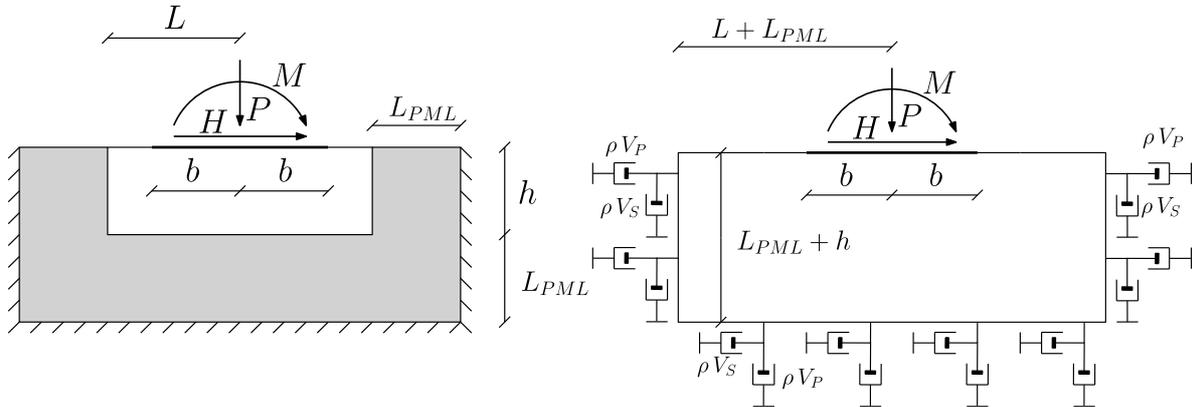


Figura 1: Modelo de zapata rígida sobre semi espacio utilizando: a) bordes absorbentes PML y b) bordes viscosos SVB.

Para poder comparar con las soluciones analíticas de Luco y Westmann se aplica una restricción de cuerpo rígido sobre los nudos asociados a la zapata rígida. Se obtiene el sistema de ecuaciones en términos de los grados de libertad de desplazamientos (y de historias de tensión en el caso PML, puede verse el detalle de la formulación en Trono et al, 2022):

$$\mathbf{M}_* \ddot{\mathbf{d}}_* + \mathbf{C}_* \dot{\mathbf{d}}_* + \mathbf{K}_* \mathbf{d}_* = \mathbf{f}_* \quad (2)$$

donde \mathbf{M}_* , \mathbf{C}_* y \mathbf{K}_* son las matrices del sistema y \mathbf{f}_* es el vector de cargas. Aplicando la transformada de Fourier de la Ec.(2):

$$(-\omega^2 \mathbf{M}_* + i\omega \mathbf{C}_* + \mathbf{K}_*) \hat{\mathbf{d}}_* = \hat{\mathbf{f}}_* \quad (3)$$

donde $\hat{\mathbf{d}}_*$ y $\hat{\mathbf{f}}_*$ son las transformadas de Fourier del vector de incógnitas y del vector de cargas. Para cada frecuencia adimensional de muestreo a_{0m} se calcula una frecuencia de muestreo $f_m = \frac{a_{0m} V_s}{2\pi b}$. La matriz de receptancia del sistema puede calcularse a partir de cada frecuencia de muestreo:

$$\alpha_m = (-(2\pi f_m)^2 \mathbf{M}_* + i2\pi f_m \mathbf{C}_* + \mathbf{K}_*)^{-1} \quad (4)$$

Se calculan numéricamente los coeficientes de [Luco y Westmann \(1972\)](#) a partir de los elementos de α_m asociados a los grados de libertad de cuerpo rígido:

$$\begin{aligned} C_{HH}^* &= \pi G \alpha_{HH}, \quad C_{VV}^* = \pi G \alpha_{VV}, \\ C_{HM}^* &= \pi G b \alpha_{HM}, \quad C_{MM}^* = \pi G b^2 \alpha_{MM} \end{aligned} \quad (5)$$

donde el supra índice (\dots^*) denota que se ha calculado numéricamente.

Se modela un caso con módulo de Poisson $\nu = 0,25$, $V_s = 229 \text{ m/s}$, $\rho = 1,8 \text{ t/m}^3$, $b = 2 \text{ m}$, $L = 1,5b$, $L_{PML} = b$ y $h = b$. Se utiliza una malla regular de elementos cuadrados de tamaño $e_s = 0.125 \text{ m}$ de lado, para que entren 32 elementos finitos debajo de la zapata.

Para obtener los parámetros que caracterizan el estiramiento real e imaginario de la PML se utilizan las expresiones propuestas por [Basu y Chopra \(2003\)](#):

$$\alpha_0 = \frac{(n+1) r_0}{2L_{PML}} \log\left(\frac{1}{R}\right), \quad \beta_0 = \frac{(m+1) V_c}{2L_{PML}} \log\left(\frac{1}{R}\right) \quad (6)$$

donde R es el coeficiente de reflexión, r_0 es una longitud característica del problema, V_c es una velocidad de propagación característica, n y m son los grados de los polinomios de estiramiento y L_{PML} es el espesor de la capa de borde. Debido a que en un semi espacio homogéneo no existen ondas evanescentes, se utiliza $r_0 = 0$ (es decir, $\alpha_0 = 0$). El coeficiente de reflexión usado en este caso $R = 0.001$. Como velocidad característica se utiliza la velocidad de ondas de corte V_s y se utilizan polinomios de estiramiento de grado 2.

En la [Figura 2](#) se muestran los coeficientes adimensionales de la matriz de flexibilidad calculados con bordes PML con 5 incógnitas de tensión ([Trono et al. 2022](#)) en comparación con la solución analítica y con el modelo con bordes SVB. La comparación se restringe al dominio presentado en la publicación de [Luco y Westmann](#) ($0 \leq a_0 \leq 1.5$). Se observa que los resultados de los modelos con bordes PML son altamente satisfactorios y que el modelo con SVB produce errores considerables cuando la frecuencia adimensional a_0 es menor a 0.75. También se observa que a medida que la frecuencia de la carga se incrementa, el error producido por utilizar bordes SVB se reduce significativamente. En este sentido, si la carga presenta frecuencias adimensionales bajas utilizar bordes PML representa una ventaja considerable.

En este caso, una fundación rígida con semi ancho $b = 2 \text{ m}$ apoyada sobre un suelo con velocidad de onda de corte $V_s = 229 \text{ m/s}$, $a_0 = 0.75$ corresponde a una frecuencia de 13.67 Hz . Esto implica que, para una fundación de 4 m , los bordes SVB provocarían errores importantes en frecuencias por debajo de los 14 Hz . Es esencial prestar especial atención a las condiciones de borde elegidas, ya que la mayoría de los sismos contienen frecuencias predominantes por debajo de este umbral.

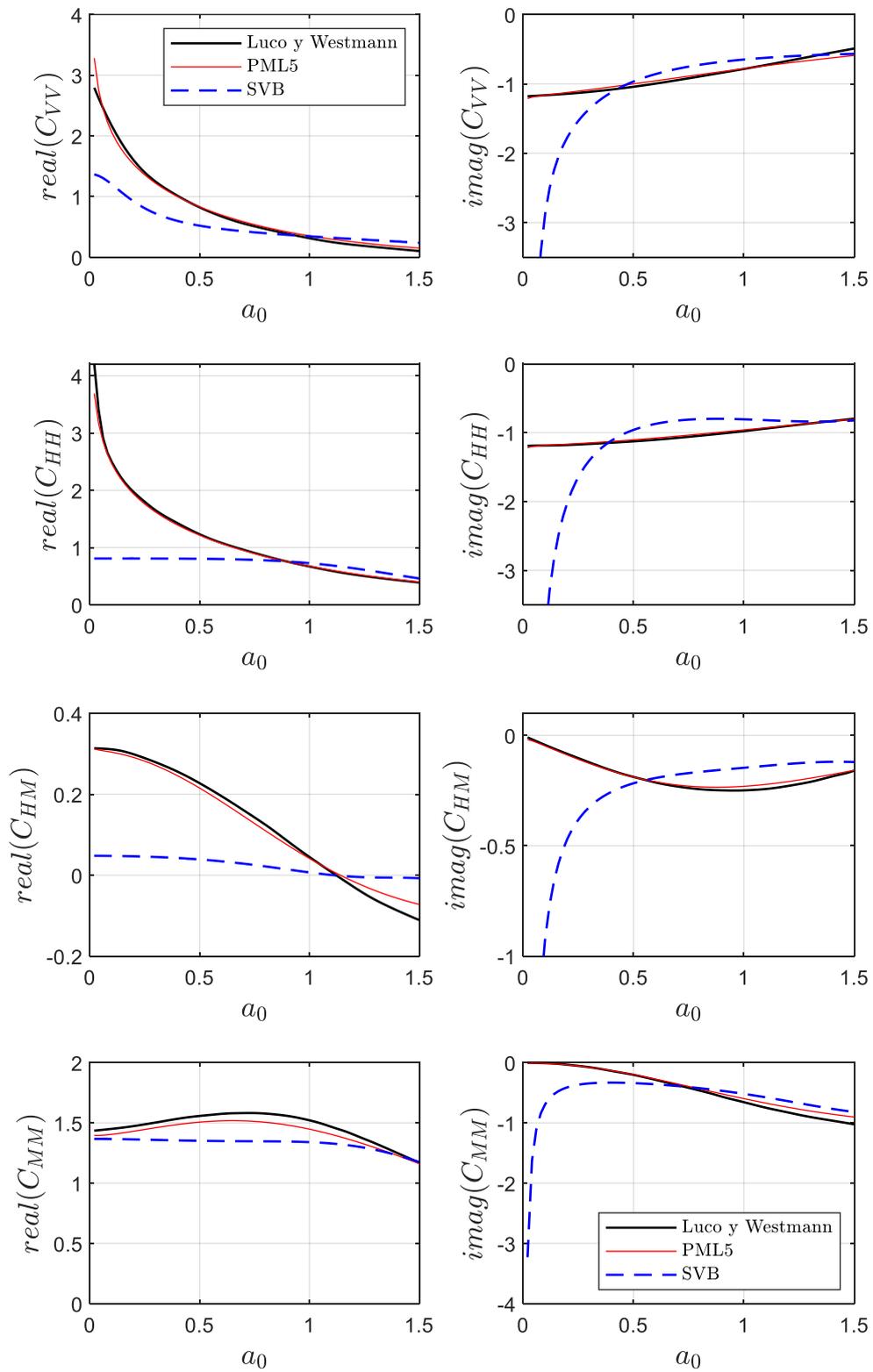


Figura 2: Coeficientes adimensionales de flexibilidad dinámica, $\nu = 0.25, h = b, L = 1.5b, L_{PML} = b, e_s = b/16$, polinomios de estiramiento PML de grado 2.

1.2 Zapata rígida sobre estrato de suelo apoyado rígidamente

Gazetas (1983) presenta la solución semi analítica de la flexibilidad dinámica de una zapata rígida sin masa sobre un estrato de suelo con amortiguamiento material apoyado rígidamente. En esta sección, se calcula dicha flexibilidad dinámica en términos de los coeficientes adimensionales presentados en la Ec.(1). Múltiples autores, entre ellos Wolf (1985) y Kramer (1996), afirman que en zonas lejanas a la falla geológica la mayoría de la energía sísmica arriba en forma de ondas superficiales. Por este motivo, resulta de interés evaluar el desempeño de los bordes absorbentes en los bordes laterales del modelo (que son justamente los que absorben las ondas de Rayleigh).

Debido a que las soluciones presentadas por Gazetas (1983) están restringidas a frecuencias bajas ($a_0 < 2.5$) se utiliza una solución de referencia a través de un modelo de dominio extendido con una longitud de 100 m hasta ambos bordes (indicado como L en la Figura 3).

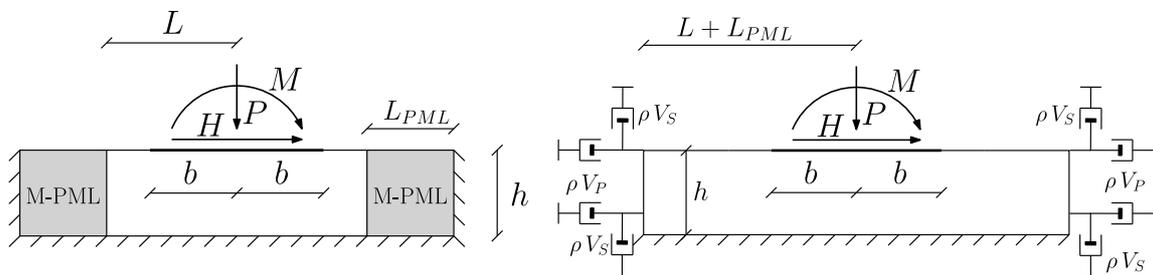


Figura 3: Esquema de los modelos numéricos con bordes M-PML y bordes SVB.

El caso presentado por Gazetas (1982) presenta un módulo de Poisson $\nu = 0.4$ y una relación $\frac{h}{b} = 2$. Cuando el estrato de suelo está apoyado rígidamente o sobre un material mucho más rígido, el borde PML suele presentar inestabilidades. Por este motivo, en este caso se utilizan bordes M-PML.

El modelo tiene dimensiones $L = 3 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $L_{PML} = 1.5 \text{ m}$ y $h = 4 \text{ m}$, elementos finitos cuadrados de lado de longitud 0.125 m , y bordes M-PML con 5 incógnitas de tensión discontinua. El suelo elegido tiene $V_S = 300 \text{ m/s}$. Los coeficientes de las funciones de estiramiento en la dirección "x" se calculan utilizando la Ec. (6) con velocidad característica $V_C = V_S$ y longitud característica $r_0 = 11 \text{ m}$. Se incorpora amortiguamiento material en el suelo de $\xi_m = 0.025$ a través del principio de correspondencia.

En la Figura 4 se muestran los coeficientes adimensionales de flexibilidad dinámica calculados con los diferentes modelos numéricos. Se observa que el desempeño de los bordes M-PML es ampliamente superior al de los bordes SVB en frecuencias bajas. Debe tenerse en cuenta que la frecuencia fundamental del estrato se encuentra en $a_0 = \pi/4$.

Para la estimación de C_{vv} y C_{hh} , el desempeño de los bordes M-PML es ampliamente superior en todo el rango de frecuencias calculado. Sin embargo, se observa que los bordes M-PML presentan inconvenientes para representar adecuadamente a C_{mm} y C_{hm} por encima de $a_0 > 2$, es decir por encima de 2.5 veces la frecuencia fundamental del estrato. Este error puede disminuirse incrementando la velocidad característica del borde ($V_C = V_P$ en lugar de V_S). En frecuencias altas ($a_0 > 4$, alrededor de 5 veces la frecuencia fundamental del estrato) se observa que los bordes SVB tienen un excelente desempeño.

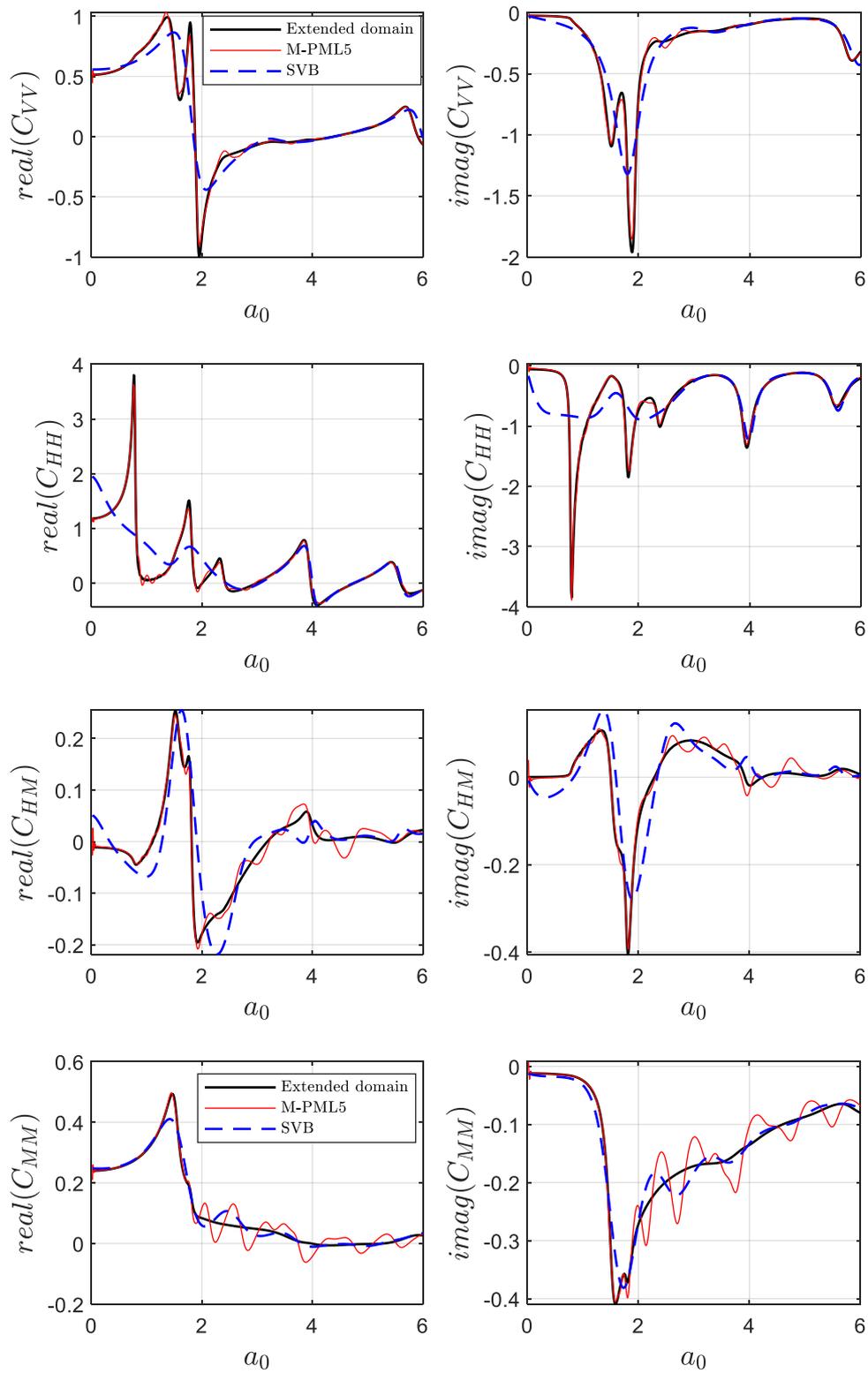


Figura 4: Coeficientes adimensionales de flexibilidad dinámica, $\nu = 0.4, h = 2b, L = 1.5b, L_{PML} = b, e_s = b/16$, polinomios de estiramiento PML de grado 2, $V_C = V_S$ y $r_0 = 11 m$.

3 COMPARACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

En esta sección se muestran los resultados de utilizar ABAQUS y PLAXIS (con bordes SVB) y el modelo con bordes PML. ABAQUS (Abaqus User's Manual, 2012) permite que el usuario elija el esquema de integración numérica. PLAXIS utiliza integración implícita en el dominio del tiempo (Plaxis Scientific Manual, 2019). Entre los bordes absorbentes disponibles en estos programas comerciales se encuentran los bordes viscosos SVB. Resulta de interés comparar los resultados del "caso A" esquematizado en la Figura 5 a, obtenidos a partir de PLAXIS, ABAQUS y el código de elementos finitos estándares elaborado en este trabajo con bordes SVB incorporados. Además, el mismo caso se modela utilizando bordes absorbentes PML de 5 incógnitas de tensión con un dominio regular de ancho $2L = 6\text{ m}$ y profundidad $h = 2\text{ m}$. El espesor de la capa PML es de $L_{PML} = 2\text{ m}$ (ver Figura 1 nuevamente). Para poder comparar con las soluciones de Luco y Westmann (1972) se elige una zapata de un material muy rígido y de muy baja densidad.

Se elige una carga aplicada con contenido de frecuencia adimensional en el rango $0 < a_0 < 0.5$. Se trata de un pulso de Ricker modificado definido de la siguiente manera:

$$P(t) = -A \frac{(0.25(\omega_r t - 3\sqrt{6})^2 - 0.5) e^{-0.25(\omega_r t - 3\sqrt{6})^2} - 13e^{-13.5}}{0.5 + 13e^{-13.5}}, \quad (7)$$

$$\omega_r = \frac{6\sqrt{6}}{t_f - t_i} \text{ para } t_0 \leq t \leq t_f$$

donde A es la amplitud ($857,32\text{ kN}$ en este caso) y t_0 y t_f son el tiempo inicial y final del pulso ($t_0 = 0$ y $t_f = 1\text{ s}$ en este caso). Este tipo de carga también es conocida como sombrero mexicano. En la Figura 5 b se observa la carga aplicada y la transformada de Fourier de la misma. La solución de la flexibilidad dinámica de Luco y Westmann (1972) se multiplica por la transformada de Fourier de la carga y luego se aplica la antitransformada de Fourier para tener una solución de referencia del desplazamiento vertical de la zapata en el dominio del tiempo. Debido a que la velocidad de propagación de ondas del material de la zapata es muy elevada, el paso del integrador explícito RK4 debe ser menor que $\Delta t = 1,57 \times 10^{-7}\text{ s}$ para cumplir la condición de Courant ($\times 0.6$) y garantizar la estabilidad del método numérico.

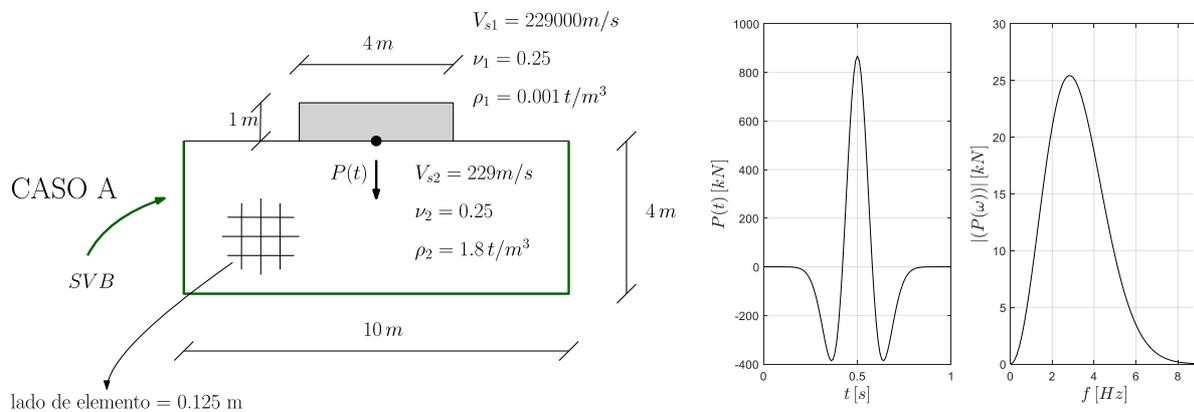


Figura 5: a) Croquis del modelo resuelto b) Carga puntual aplicada y transformada de Fourier de la carga.

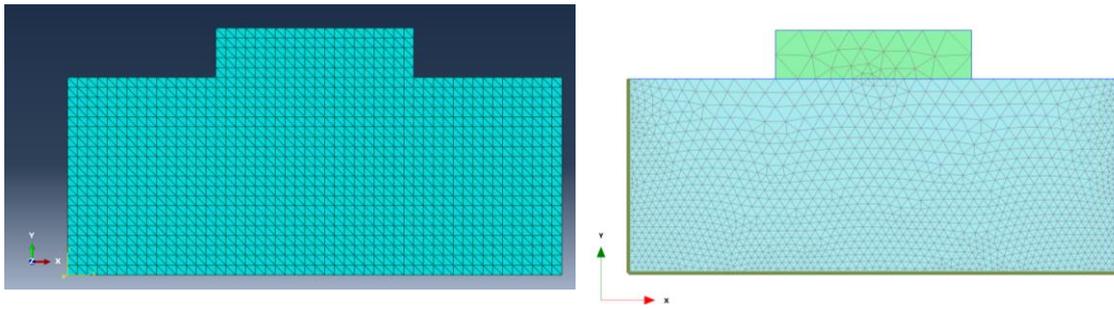


Figura 6: a) Modelo realizado en ABAQUS con elementos triangulares de 6 nudos y bordes SVB. b) Modelo realizado en PLAXIS con elementos triangulares de 15 nudos y bordes SVB.

En la Figura 7 se observa el desplazamiento vertical obtenido a partir de los diferentes modelos. Los resultados de PLAXIS y ABAQUS son muy similares a los resultados del código propio con SVB incorporado (indicado como SVB FEM). Se observa que el modelo con borde PML con 5 incógnitas de tensión discontinua (indicado como PML5) aproxima mejor a la solución analítica que los modelos realizados con programas comerciales. Se observa que el error producido por usar los bordes viscosos disponibles en los programas comerciales puede ser considerable.

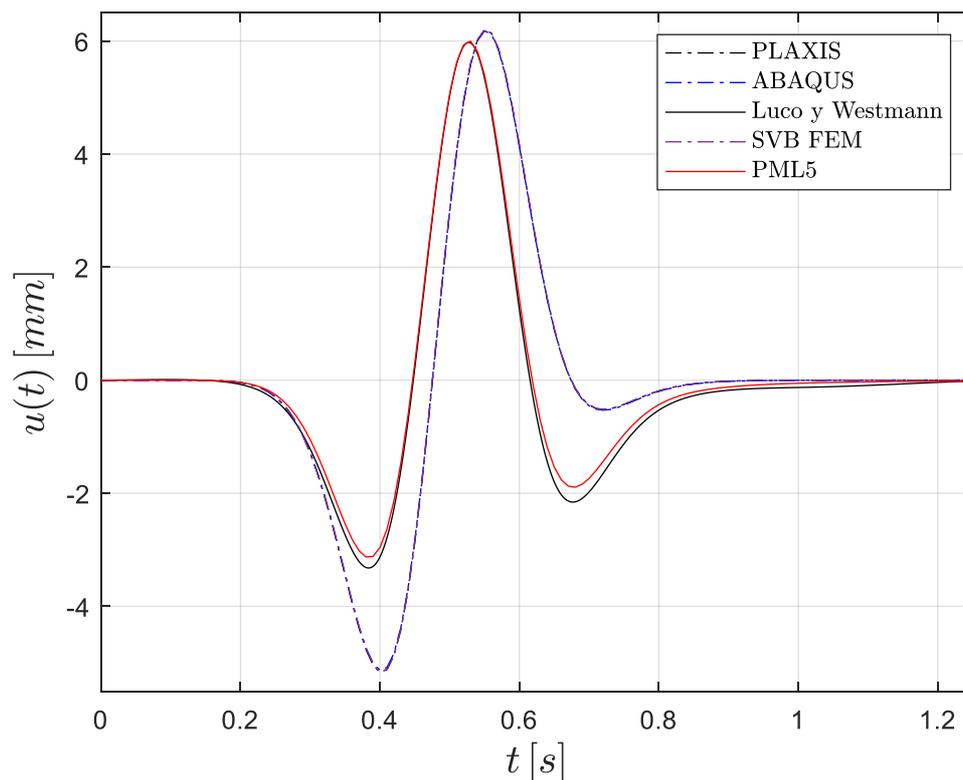


Figura 7: Desplazamiento vertical de la zapata rígida.

4 CONCLUSIONES

El uso de bordes absorbentes SVB puede introducir errores considerables en la estimación de desplazamientos cuando las cargas dominantes operan en frecuencias bajas ($a_0 < 0.75$). En contraste, los bordes PML y M-PML tienen un excelente desempeño en un amplio rango de frecuencias. Sin embargo, cuando el estrato de suelo está apoyado rígidamente en la base, los bordes M-PML (configurados con una velocidad característica de ondas de corte) muestran limitaciones para representar adecuadamente la flexibilidad al giro de la zapata por encima de

2.5 veces la frecuencia natural del estrato. Este comportamiento, aunque frecuentemente pasado por alto en la literatura, es crucial, ya que las comparaciones se suelen hacer en frecuencias bajas.

La selección del borde absorbente debe basarse en la naturaleza del problema y las frecuencias dominantes. En problemas de interacción sísmica, donde prevalecen frecuencias bajas, los bordes PML superan a los SVB en desempeño. No obstante, si se trata de situaciones con cargas de alta frecuencia respecto a la frecuencia natural del estrato, como vibraciones inducidas por maquinaria, tráfico o ferrocarriles, los bordes SVB pueden ser más adecuados, dada la facilidad con que pueden implementarse.

REFERENCIAS

- ABAQUS 6.12. Abaqus User's Manual. Volume V: Prescribed conditions, constraints and interactions. 2012.
- Basu, U. y Chopra, A.K., Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains: theory and finite-element implementation, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192, 1337-1375 (2003).
- Berenger J. P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2):185-200, 1994.
- Bielak, J. Loukakis, K., Yoshiaki, H. Yoshimura, C., Domain reduction method for three-dimensional earthquake modeling in localized regions, part I: theory, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 93, No.2 pp.817-824. 2003.
- Fathi, A., Poursartip, B. Kallivokas, L. F.: Time domain hybrid formulations for wave simulation in three-dimensional PML-truncated heterogeneous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. DOI:10.1002/nme.4780, 2015.
- Gazetas G. Analysis of machine foundation vibrations: state of the art. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.2. No 1, 0261-7277/83/010002-41. 1983.
- Kramer, S.L.. Geotechnical Earthquake Engineering. *Prentice Hall*, 1996.
- Kucukcoban S. y Kallivokas, L.F. A symmetric hybrid formulation for transient wave simulations in PML-truncated heterogeneous media. *Wave Motion*, 50, 57-79 (2013).
- Lysmer J. Kuhlemeyer R. L.. Finite dynamic model for infinite media. *Journal of Engineering Mechanics Division*, 95:859-877, 1969.
- Luco E. J., Westmann R. A. Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic half space. *Journal of Applied Mechanics*. 527-534. 1972.
- Meza-Fajardo, K. C., Papageorgiou, A. S.: A non-convolutional, Split-field, perfectly matched layer for wave propagation in isotropic and anisotropic elastic media: stability analysis. *Bulletin of the Seismological Society of America* 98(4), 1811-1836 (2008).
- PLAXIS. Plaxis Scientific MANUAL. 2019.
- Trono A., Brewer A.T., Pinto F., Ceballos M. A.: Bordos absorbentes de capas perfectamente acopladas mediante elementos finitos mixtos. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, Vol XXXIX, 2022.
- Trono A., Brewer A.T., Pinto F., Ceballos M. A.: Estabilización del medio de capa perfectamente acoplada mediante funciones de estiramiento multiaxiales. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, Vol XXXX, 2023.
- Wolf. J., P. Dynamic soil-structure interaction. International Series in Civil Engineering and Engineering mechanics, Prentice-Hall. 1985.
- Zienkiewicz, O.C., Bicanic N. *Earthquake input definition and the transmitting boundary conditions*. Advances in Computational Nonlinear Mechanics. Springer-Verlag. Wien, 1989.