Asociación Argentina



de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XLI, pp. 537-546 C.I. Pairetti, M.A. Pucheta, M.A. Storti, C.M. Venier (Eds.) B. Luccioni, F. Isla (Issue eds.) Rosario, November 5-8, 2024

MÉTODO DEL PUNTO MATERIAL APLICADO AL ANÁLISIS DE FRACTURA FRÁGIL DINÁMICA UTILIZANDO CAMPO DE FASE

MATERIAL POINT METHOD APPLIED TO DYNAMIC FRAGILE FRACTURE ANALYSIS USING PHASE-FIELD

Carlos F. Estrada^a

^aDepartamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina, carlos.estrada@unc.edu.ar, https://fcefyn.unc.edu.ar/facultad/secretarias/academica/departamentos/estructuras/

Palabras clave: Punto material, fractura frágil dinámica, campo de fase.

Resumen. En este trabajo se aplica el Método del Punto Material (MPM) para la simulación de fractura dinámica en medios elásticos utilizando el Método de Campo de Fase (PFM de su acrónimo en inglés). En la formulación implementada, las ecuaciones de movimiento y las ecuaciones que gobiernan el campo de fase se resuelven de forma independiente para cada campo discreto (utilizando un algoritmo predictor-corrector). Para la malla de fondo se utiliza una aproximación isogeométrica (NURBS) de difernetes orden de interpolación. También en este trabajo se ha implementado una formulación que permite tratar problemas con contacto. La herramienta numérica se implementó naturalmente en un código explícito. Se analizan algunos problemas de propagación de fisura y se estudia la convergencia de los resultados para diferentes órdenes de interpolación.

Keywords: Material point, dynamic brittle fracture, phase-filed

Abstract. In this work, the Material Point Method (MPM) is applied for the simulation of dynamic fracture in elastic media using the phase field method (PFM). In the implemented formulation, the equations of motion and the equations governing the phase field are solved independently for each discrete field (using a predictor-corrector algorithm). For the background mesh, an isogeometric approximation (NURBS) with different interpolation orders is used. Also in this work, a formulation has been implemented that allows treating problems with contact. The numerical tool was naturally implemented in explicit code. Some crack propagation problems are analyzed and the convergence of the results for different interpolation orders is studied.

()

1. INTRODUCCIÓN

La mecánica de fractura es un área de interés dentro del diseño en ingeniería estructural. Un aspecto de interés es la prevención de la falla por fractura de diferentes componentes industriales, especialmente en el sector automotriz y aeroespacial. Así, la simulación numérica de la propagación de fisuras puede proporcionar información valiosa sobre los procesos mecánicos subyacentes y al mismo tiempo proporciona un marco para el diseño óptimo de materiales considerando su respuesta post-fractura bajo carga de impacto. Sin embargo, para poder obtener resultados numéricos que representen correctamente los diferentes mecanismos de fratura se requiere de herramientas numéricas robustas y precisas. Dichas herramientas deben contemplar el modelado con no linealidades inducidas por contacto y cinemática de grandes desplazamientos.

Entre los métodos numéricos posibles, el método de elementos finitos es ampliamente utilizado en conjunto con la mecánica de fractura elástica lineal basados en modelos tipo Griffith. Entre las formulaciones, están las que representan las fisuras como discontinuidades discretas, Krueger (2004) y aquellas que introducen el método de elementos finitos extendido, por ejemplo Moës et al. (1999). Existe una extensa bibliografía basada en estos enfoques, sin embargo, los diferentes métodos, sea insertando líneas de discontinuidad, o enriqueciendo el campo de desplazamientos con discontinuidades utilizando el método de partición de la unidad, tiene como tarea tediosa, el seguimiento de la evolución de la fractura, especialmente en tres dimensiones.

Recientemente, han surgido métodos alternativos para la simulación numérica de fracturas frágiles. En estos enfoques, no es necesario utilizar una estrategia de remallado o enriquecimiento cerca del extremo de fisura, así, las discontinuidades no se introducen en el sólido y la superficie de fractura es aproximada por un campo de fase (PF de su acrónimo en inglés Phase-Field). Un trabajo pionero en esta metodología es el de Francfort y Marigo (1998) y posteriormente Bourdin et al. (2008). La principal ventaja de utilizar un campo de fase es que la evolución de las superficies de fractura se deriva de la solución de un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales. La implementación no requiere el seguimiento de las superficies de fractura, esto contrasta con la complejidad de muchos modelos de fractura discretos. Por lo tanto, esto puede ser particularmente ventajoso cuando se consideran múltiples fracturas que se ramifican, sobre todo en tres dimensiones.

Un campo promisorio es aquel que resulta de combinar el método del punto material (MPM de su acrónimo en ingles Material Point Method) para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales y la aproximación por campo de fase para tratar problemas de fractura frágil dinámica. Como trabajo pionero Borden et al. (2012) utliza una descomposición del tensor de deformaciones en componentes positivas y negativas a la vez que aproxima el sistema de ecuaciones acopladas a través del MPM. En la misma linea Kakouris y Triantafyllou (2019) formulan una aproximación para tratar problemas de fracturas por carga de impacto con anisotropía y utiliza aproximaciones isogeométricas para las funciones de interpolación. Otros trabajos donde se utiliza MPM pueden verse en Zhang et al. (2022), donde se tratan problemas de fractura y contacto en materiales hiperelásticos, y en Hu et al. (2023) donde se analiza la fractura por contacto e impacto sobre geomateriales.

En este trabajo se implementa la formulación siguiendo los desarrollos de Borden et al. (2012) y el algoritmo utilizado en Kakouris y Triantafyllou (2019). Se utilizan diferentes interpolaciones isogeométricas en la grilla de fondo y se analizan estados planos de deformación y de tensión. La herramienta implementada, también permite tratar problemas que involucran contacto entre cuerpos.

2. FORMULACIÓN

De acuerdo a la teoría de Griffith (1921) la energía almacenada en un cuerpo arbitrario Ω con un borde externo $\delta\Omega$ y una discontinuidad interna Γ se expresa como

$$\psi = \psi_e + \psi_f = \int_{\Omega} \psi_e(\varepsilon) \, dV + \int_{\Gamma} \mathcal{G}_{\mathcal{C}} d\Gamma \tag{1}$$

donde ψ_e y ψ_f son la energía de deformación elástica y la energía de fractura, respectivamente. Así, la densidad de energia elástica, $\psi_e(\varepsilon)$, se expresa como

$$\psi_e\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{2}$$

donde λ y μ son los parámetros de Lamé y $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ es la densidad de energía de fractura crítica. $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$, se puede aproximar siguiendo el trabajo de Miehe et al. (2010) y Bourdin et al. (2008) como

$$\int_{\Gamma} \mathcal{G}_{\mathcal{C}} d\Gamma \simeq \int_{\Omega} \mathcal{G}_{\mathcal{C}} \left[\frac{(c-1)^2}{4l_0} + l_0 \frac{\partial c}{\partial x_i} \frac{\partial c}{\partial x_i} \right] d\Omega$$
(3)

donde $c(\mathbf{x},t) \in [0,1]$ es el campo de fase definido sobre el dominio Ω y $l_0 \in \mathbb{R}^+$ es un parámetro de longitud de escala de la fisura. El campo de fase depende del vector posición $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y del tiempo t. Toma el valor de 1 alejado de la fisura y 0 en el interior de la misma. Para modelar la pérdida de rigidez del material en la zona de falla, siguiendo a Miehe et al. (2010), se define la energía elástica como

$$\psi_e(\boldsymbol{\varepsilon}, c) = \left[(1-k) c^2 + k \right] \psi_e^+(\boldsymbol{\varepsilon}) + \psi_e^-(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{4}$$

donde ψ_e^+ y ψ_e^- son las energías de deformación calculadas a partir de las componentes positivas y negativas del tensor de deformaciones, respectivamente. La función de degradación en la Ec. (4) se expresa como $[(1 - k) c^2 + k]$ y el parámetro $0 \le k \le 1$ se toma igual a 0 en este trabajo. Siguiendo los desarrollos de Borden et al. (2012) y la notación de Crisfield (1997), la descomposición espectral del tensor de deformaciones se expresa como $\varepsilon = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}$, donde \mathbf{Q} son los autovectores ortonormales y $\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ es la diagonal del tensor principal de deformaciones. Las componentes positivas y negativas de las deformaciones son $\varepsilon^+ = \mathbf{Q}\mathbf{A}^+\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}$ y $\varepsilon^- = \mathbf{Q}\mathbf{A}^-\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}$, respectivamente. Donde $\mathbf{A}^+ = \text{diag}(\langle \lambda_1 \rangle, \langle \lambda_2 \rangle, \langle \lambda_3 \rangle)$ y $\mathbf{A}^- = \mathbf{A} - \mathbf{A}^+$. Con $\langle \lambda_i \rangle = \lambda_i$, si $\lambda_i > 0$, o $\langle \lambda_i \rangle = 0$, si $\lambda_i \le 0$.

Luego, ψ_e^+ y ψ_e^- , se pueden expresar como

$$\psi_{e}^{+}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\lambda\left\langle \mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\right\rangle^{2} + \mu\mathrm{tr}\left[\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{+}\right)^{2}\right]$$
(5)

$$\psi_{e}^{-}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\lambda\left(\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \langle\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon}\rangle\right)^{2} + \mu\mathrm{tr}\left[\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{+}\right)^{2}\right]$$
(6)

De esta forma, descomponiendo el tensor de deformaciones, es posible expresar la Ec. (4), donde, por un lado, se mantiene la resistencia a compresión y por otro lado, es la parte positiva, afectada por el parámetro del campo de fase, la que tiene importancia en el proceso de fractura. Las componentes del tensor de tensiones se obtienen a través de

$$\sigma_{ij} = \left[(1-k) c^2 + k \right] \frac{\partial \psi_e^+}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial \psi_e^-}{\partial \varepsilon_{ij}}$$
(7)

3. ECUACIONES DE GOBIERNO DEL MÉTODO CAMPO DE FASE

La ecuación de balance de la energía se expresa como

$$\dot{\mathcal{K}}\left(\dot{\mathbf{u}}\right) + \dot{\mathcal{W}}_{int}\left(\dot{\mathbf{u}}, \dot{c}, \nabla \dot{c}\right) - \dot{\mathcal{W}}_{ext}\left(\dot{\mathbf{u}}\right) = 0 \tag{8}$$

donde $\hat{\mathcal{K}}(\dot{\mathbf{u}})$ es la tasa de energía cinética, $\hat{\mathcal{W}}_{int}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{c}, \nabla \dot{c})$ es la tasa del trabajo interno y $\hat{\mathcal{W}}_{ext}(\dot{\mathbf{u}})$ es la tasa del trabajo externo. Además $\dot{\mathbf{u}} = d\dot{\mathbf{u}}/dt$ es el campo de velocidades, $\dot{c} = dc/dt$ es la derivada del campo de fase y $\nabla \dot{c} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)$ es la tasa de la derivada espacial del campo de fase. Aplicando el teorema de divergencia a la Ec. (8), se obtiene

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} & \text{en } \Omega \\ \left(\frac{4l_0(1-k)\psi_e^+}{\mathcal{G}_c}\right)c - 4l_0^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} = 1 & \text{en } \Omega \end{cases}$$
(9)

donde $\ddot{\mathbf{u}} = d\dot{\mathbf{u}}/dt$ es el campo de aceleración. De la Ec. (9), para asegurar la irreversibilidad de la fractura se utiliza el máximo valor de la densidad de energía positiva ψ_e^+ obtenida durante el dominio del tiempo [0, t]. Así, se puede utilizar la hisoria del campo \mathcal{H} y a través de la condición de Kuhn-Tucker

$$\psi_e^+ - \mathcal{H} \le 0, \quad \dot{\mathcal{H}} \ge 0, \quad \dot{\mathcal{H}} \left(\psi_e^+ - \mathcal{H}\right) = 0$$
 (10)

se puede reescribir Ec. (9) como

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} & \text{en } \Omega \\ \left(\frac{4l_0(1-k)\mathcal{H}}{\mathcal{G}_c}\right) c - 4l_0^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} = 1 & \text{en } \Omega \end{cases}$$
(11)

cuyas condiciones de borde y condiciones inicales son

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \operatorname{en} \partial \Omega_{\mathbf{t}} \\ \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} & \operatorname{en} \partial \Omega_{\mathbf{u}} \\ \nabla c \cdot \mathbf{n} = 0 & \operatorname{en} \partial \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \operatorname{en} \Omega_0 \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 & \operatorname{en} \Omega_0 \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 & \operatorname{en} \Omega_0 \end{cases}$$
(12)

donde \mathcal{H}_0 representa el valor inicial de la historia del campo y se utiliza para modelar una fisura (inicial) existente.

4. MPM PARA FRACTURA FRÁGIL DINÁMICA

Para poder resolver las Ecs. (11) se utiliza MPM (Sulsky et al. (1994)). En dicha formulación el dominio Ω es discretizado en puntos materiales $\mathcal{P} = \{p \mid p = 1, 2, ..., N_p\}$ con N_p partículas. Así, la densidad $\rho_{\mathcal{D}}$ y el volumen $V_{\mathcal{D}}$ del dominio discreto \mathcal{D} , se pueden expresar como $\rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{x}_{\mathcal{D}}, t) = \sum_{p=1}^{N_p} \rho_{\mathcal{D}p} V_{\mathcal{D}p} \delta(\mathbf{x}_{\mathcal{D}} - \mathbf{x}_{\mathcal{D}p})$ y $V_{\mathcal{D}p}(\mathbf{x}_{\mathcal{D}}, t) = \sum_{p=1}^{N_p} V_{\mathcal{D}p} \delta(\mathbf{x}_{\mathcal{D}} - \mathbf{x}_{\mathcal{D}p})$, respectivamente. Donde $\mathbf{x}_{\mathcal{D}}$ es el vector de posición del campo discreto \mathcal{D} y δ es la función delta de Dirac. La densidad de masa del punto material se define como $\rho_{\mathcal{D}p} = M_{\mathcal{D}p}/V_{\mathcal{D}p}$, donde $M_{\mathcal{D}p}$ y $V_{\mathcal{D}p}$ son la masa y el volumen del punto, respectivamente. El vector posición de cada punto material se define como $\mathbf{x}_{\mathcal{D}p}$. Estos puntos se mueven dentro de una grilla Euleriana formada por I nodos y N celdas. Cada punto material se asigna de nuevo desde los nodos de la grilla a los puntos.



Figura 1: Esquema descriptivo del MPM

Finalmente, se restablece la grilla de fondo y el ciclo computacional continúa. Los pasos del MPM se muestran en la Fig. 1.

En este trabajo, el mapeo de los puntos de material a los nodos de la grilla y viceversa, se implementa mediante la utilización de funciones de interpolación isogeométricas del tipo NURBS. De esta forma, se puede construir una aproximación suave de orden superior para MPM y evitar posibles inestabilidades numéricas para aquellos puntos materiales que cruzan los límites de una celda. En términos generales, las funciones NURBS se definen sobre la grilla $n \times m$, donde los nodo son puntos de control $\{B_{i,j}\}, i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., m$. Para poder construir las funciones de interpolación es necesario definir en cada dimensión el grado de los polinomios $p \ y \ q \ y$ los vectores nodales $\Xi = \{ \xi_1 \ \xi_2 \ ... \ \xi_{n+p+1} \} \ y \ H = \{ \eta_1 \ \eta_2 \ ... \ \eta_{m+q+1} \}$, en coordenadas paramétricas $\xi \ y \ \eta$. De esta forma, es posible obtener a traves de ecuaciones de recurrencia (Cox-deBoor), las funciones base $N_{i,p}(\xi) \ y \ M_{j,q}(\eta)$. Luego, es posible definir las funciones de interpolación NURBS, através de un parámetro de peso $w_{i,j} > 0$, como

$$R_{i,j}^{p,q}\left(\xi,\eta\right) = \frac{N_{i,p}\left(\xi\right)M_{j,q}\left(\eta\right)w_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}N_{i,p}\left(\xi\right)M_{j,q}\left(\eta\right)w_{i,j}}$$
(13)

En este trabajo llamaremos en forma genérica, a las funciones de la Ec. (13), definidas en un espacio físico, como $N_I(\mathbf{x}_p)$. Para mayores detalles ver el trabajo de Moutsanidis et al. (2020).

Así, la primera Ec. (11) puede escribirse como

$$\int_{\Omega_{\mathcal{D}}} \left(\rho_{\mathcal{D}} \ddot{\mathbf{u}}_{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{D}} \right) dV_{\mathcal{D}} + \int_{\Omega_{\mathcal{D}}} \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{D}} \colon \nabla \mathbf{w}_{\mathcal{D}} \right) dV_{\mathcal{D}} = \int_{\partial\Omega_{\mathcal{D}\mathbf{t}}} \left(\mathbf{t} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{D}} \right) d\partial\Omega_{\mathcal{D}\mathbf{t}} + \int_{\Omega_{\mathcal{D}}} \left(\boldsymbol{b}_{\mathcal{D}} \cdot \boldsymbol{w}_{\mathcal{D}} \right) dV_{\mathcal{D}}$$
(14)

Introduciendo la aproximación por MPM dentro de Ec. (14), se tiene

$$\sum_{p=1}^{N_p} \left(\rho_{\mathcal{D}p} \ddot{\mathbf{u}}_{\mathcal{D}p} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{D}p} \right) V_{\mathcal{D}p} + \sum_{p=1}^{N_p} \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{D}p} \colon \nabla \mathbf{w}_{\mathcal{D}p} \right) V_{\mathcal{D}p} = \int_{\partial\Omega_{\mathcal{D}t}} \left(\mathbf{t}_{\mathcal{D}p} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{D}p} \right) d\partial\Omega_{\mathcal{D}t} + \int_{\Omega_D} \left(\mathbf{b}_{\mathcal{D}p} \cdot \mathbf{w}_{\mathcal{D}p} \right) V_{\mathcal{D}p}$$
(15)

donde $\mathbf{w}_{\mathcal{D}p} = \sum_{I=1}^{N_n} N_I(\mathbf{x}_p) \mathbf{w}_{\mathcal{D}I} \mathbf{y} \nabla \mathbf{w}_{\mathcal{D}p} = \sum_{I=1}^{N_n} \nabla N_I(\mathbf{x}_p) \mathbf{w}_{\mathcal{D}I}$ son las funciones de peso y sus derivadas espaciales, respectivamente. Similarmente para el campo de desplazamientos, velocidades y aceleraciones, se tiene $\mathbf{u}_{\mathcal{D}p} = \sum_{I=1}^{N_n} N_I(\mathbf{x}_p) \mathbf{u}_{\mathcal{D}I}, \dot{\mathbf{u}}_{\mathcal{D}p} = \sum_{I=1}^{N_n} N_I(\mathbf{x}_p) \dot{\mathbf{u}}_{\mathcal{D}I} \mathbf{y}$ $\ddot{\mathbf{u}}_{\mathcal{D}p} = \sum_{I=1}^{N_n} N_I(\mathbf{x}_p) \ddot{\mathbf{u}}_{\mathcal{D}I}$, respectivamente. De esta forma se puede compactar la Ec. (15) como

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}}\ddot{\mathbf{u}}_{\mathcal{D}} + \mathbf{F}_{\mathcal{D}}^{int} = \mathbf{F}_{\mathcal{D}}^{ext} \tag{16}$$

donde las componentes de $\mathbf{F}_{\mathcal{D}}^{int}$ y $\mathbf{F}_{\mathcal{D}}^{ext}$, se expresan de la siguiente forma

$$\mathbf{F}_{\mathcal{D}I}^{int} = \sum_{p=1}^{N_p} \left(\boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{D}} \cdot \nabla N_I \left(\mathbf{x}_p \right) \right) V_{\mathcal{D}p}$$
(17)

$$\mathbf{F}_{\mathcal{D}I}^{ext} = \int_{\partial\Omega_{\mathcal{D}\mathbf{t}}} \left(\mathbf{t}_{\mathcal{D}} \cdot N_{I}\left(\mathbf{x}\right) \right) d\partial\Omega_{\mathcal{D}\mathbf{t}} + \sum_{p=1}^{N_{p}} \boldsymbol{b}_{\mathcal{D}p} N_{I}\left(\mathbf{x}_{p}\right) V_{\mathcal{D}p}$$
(18)

y las componentes de $\mathbf{M}_{\mathcal{D}}$ se expresan como $M_{\mathcal{D}I} = \sum_{p=1}^{N_p} (\rho_{\mathcal{D}p} N_I(\mathbf{x}_p)) V_{\mathcal{D}p}$. Procediendo de manera similar, para el campo de fase (segunda Ec. (11)), se tiene, el campo

Procediendo de manera similar, para el campo de fase (segunda Ec. (11)), se tiene, el campo discreto

$$\int_{\Omega_{\mathcal{D}}} \left(\frac{4l_{0\mathcal{D}} \left(1 - k_{\mathcal{D}} \right) \mathcal{H}_{\mathcal{D}}}{\mathcal{G}_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}}} + 1 \right) c_{\mathcal{D}} w_{\mathcal{D}} dV_{\mathcal{D}} + \int_{\Omega_{\mathcal{D}}} 4l_{0}^{2} \left(\nabla c_{\mathcal{D}} \colon \nabla w_{\mathcal{D}} \right) dV_{\mathcal{D}} = \int_{\Omega_{\mathcal{D}}} w_{\mathcal{D}} dV_{\mathcal{D}}$$
(19)

Introduciendo la aproxiamción por MPM y utilizando la interpolación del campo de fase $c_{\mathcal{D}p} = \sum_{I=1}^{N_n} N_I(\mathbf{x}_p) c_{\mathcal{D}I}$ y su derivada espacial $\nabla c_{\mathcal{D}p} = \sum_{I=1}^{N_n} \nabla N_I(\mathbf{x}_p) c_{\mathcal{D}I}$, similarmente para la función de peso, se obtiene

$$\sum_{p=1}^{N_p} \mathcal{F}_{\mathcal{D}p} c_{\mathcal{D}p} N_I(\mathbf{x}_p) V_{\mathcal{D}p} + \sum_{p=1}^{N_p} 4l_{0\mathcal{D}p}^2 \left(\nabla c_{\mathcal{D}p} \cdot \nabla N_I(\mathbf{x}_p)\right) V_{\mathcal{D}p} = \sum_{p=1}^{N_p} N_I(\mathbf{x}_p) V_{\mathcal{D}p}$$
(20)

con

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}p} = \frac{4l_{0\mathcal{D}p}\left(1 - k_{\mathcal{D}p}\right)\mathcal{H}_{\mathcal{D}p}}{\mathcal{G}_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}p}}} + 1$$
(21)

Así, (Ec. (20)) se puede expresar en forma compacta como

$$\mathbf{K}_{\mathcal{D}}\mathbf{c}_{\mathcal{D}} = \mathbf{F}_{\mathcal{D}} \tag{22}$$

con componentes $\mathbf{F}_{\mathcal{D}}$ y $\mathbf{K}_{\mathcal{D}}$ expresadas de la siguiente forma

$$\mathbf{F}_{\mathcal{D}I} = \sum_{p=1}^{N_p} N_I(\mathbf{x}_p) V_{\mathcal{D}p}$$
(23)

$$\mathbf{K}_{\mathcal{D}I,J} = \sum_{p=1}^{N_p} \left[\mathcal{F}_{\mathcal{D}p} N_J \left(\mathbf{x}_p \right) N_I \left(\mathbf{x}_p \right) V_{\mathcal{D}p} + 4l_{0\mathcal{D}p}^2 \left(\nabla N_J \left(\mathbf{x}_p \right) \cdot \nabla N_I \left(\mathbf{x}_p \right) \right) \right] V_{\mathcal{D}p}$$
(24)

Para resolver el campo de fase Eq. (22), se utiliza un esquema escalonado con k iteraciones. Se resuelve el campo de fase para un valor inicial de la historia del campo \mathcal{H}_{Dp}^k , se calcula la matriz de coeficientes \mathbf{K}_D y se obtienen los valores nodales del campo de fase c_{DI}^k . Con un algoritmo predictor-corrector se resuelve la Eq. (16) y se corrige el valor de \mathcal{H}_{Dp}^k . Se controla la convergencia a través de $\| \mathbf{R}_D^k \| \le tol$, donde \mathbf{R}_D^k es un vector de fuerza residual que tiene en cuenta el equilibrio de las fuerzas involucradas en la expresión (16). Alcanzada la convergencia, se prosigue con el próximo incremento de tiempo del algoritmo explícito.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

En los siguientes ejemplos numéricos se muestran algunas aplicaciones de la formulación propuesta.

5.1. Placa bajo carga de impacto

Este ejemplo analiza un estado plano de deformación de una placa inicialmente fisurada cargada dinámicamente a tracción. La fuerza de tracción se aplica en el borde superior e inferior en el paso del tiempo inicial y se mantiene constante durante el análisis. El material que constituye la placa está definido por un módulo de Young E = 32 GPa, un coeficiente de Poisson $\nu = 0, 20$, una densidad $\rho = 2450 \times 10^{-12} kg/m^3$ y una densidad de energía superficial $\mathcal{G}_C = 3 N/m$. En la Fig. 2 se muestra la geometría de la placa y el estado de carga. La geometría se discorretizó con 262144 y 147456 puntos materiales correspondiente a un análisis isogeométrico cuadrático y cúbico, respectivamente.



Figura 2: Placa bajo carga de impacto. Geometría y condiciones de carga.



Figura 3: Placa bajo carga de impacto. (a) Energía interna de deformación. (b) Energía de fractura.

En la Fig. 3a se muestra la evolución de la energía de deformación para diferentes órdenes de interpolación isogeométricas. Se compara con resultados presentados en Borden et al. (2012) mediante un solución por elementos finitos. En la Fig. 3b se muestra la evolución de la energía de fractura total (Ec. (3)) y se compara nuevamente con el resultado obtenido por Borden et al. (2012).

En la Fig. 4 se muestra la evolución del campo de fase para diferentes instantes de tiempo. Este caso corresponde con una interpolación isogeométrica cúbica. En el análisis numérico puede observarse que a los $\sim 35 \, \mu s$ se produce la bifurcación de la fisura.



Figura 4: Placa bajo carga de impacto. Evolución del campo de fase para: (a) $t = 0 \mu s$, (b) $t = 45 \mu s$ y (c) $t = 80 \mu s$

5.2. Impacto de dos anillos

Este ejemplo analiza el impacto de dos anillos sometidos a una velocidad inicial de $\dot{u}_0 = 10 m/s$. En la Fig. 5a se muestra la geometría y las condiciones de borde. Se considera un estado plano de tensión con un espesor t = 2 mm. Los anillos son de material lineal elástico con un módulo de Young E = 190 GPa, un módulo de Poisson $\nu = 0, 30$ y una densidad $\rho = 8000 Kg/m^3$. Para la formación de fisuras se utiliza una densidad de energía superficial $\mathcal{G}_C = 6000 N/m$. La geometría de cada anillo se ha discretizado con 12888 puntos materiales y se considera contacto con un coeficiente de fricción $\mu_f = 0, 65$. En este ejemplo se utilizó una interpolación isogeométrica cúbica.

En la Fig. 5b se muestra la evolución de la energía de fractura total y se compara con los resultados obtenidos por Kakouris y Triantafyllou (2019). Nótese como en el instante que se fracturan diametralmente ($\sim 150 \,\mu s$) los anillos, la energía se mantiene prácticamente constante y para un tiempo aproximado de $400 \mu s$ los anillos dejan de tener contacto y se separan. En la Fig. 6 se muestra diferentes instantes del proceso de impacto entre los anillos. Para un tiempo de $30 \mu s$ se observa el desarrollo de una fisura que se propaga desde el borde interior, debido a las tensiones principales de tracción, hacia la zona de contacto. Para un tiempo de $60 \mu s$ la fisura se extendió hasta la zona de contacto. Se puede apreciar algún daño en la superficie de contacto. También puede observarse alguna degradación del material en la parte superior e inferior de los anillos. Para un tiempo de $100 \mu s$ se muestra la formación de una nueva fisura en la parte posterior de cada anillo y se desarrolla desde la zona interior de máxima tracción hacia el borde exterior.

6. CONCLUSIONES

Se ha llevado a cabo un análisis de fractura frágil dinámica utilizando el método del punto material MPM para problemas planos de tensión y deformación, incluyendo contacto. Se utilizó una aproximación isogeométrica utilizando NURBS de grado cuadrático y cúbico. Debido



Figura 5: Impacto de dos anillos. (a) Geometría y condiciones inicales. (b) Energía de fractura.



Figura 6: Impacto de dos anillos. Evolución del campo de fase: (a) $t = 0 \mu s$, (b) $t = 30 \mu s$, (c) $t = 60 \mu s$., (d) $t = 100 \mu s$.

a la cantidad de puntos materiales utilizados en las simulaciones, es conveniente paralelizar el cálculo. En los ejemplos mostrados se utilizó paralelización a nivel de CPU. Se deja como trabajo futuro paralelizar a nivel de placa de video GPU y poder simular mayor cantidad de partículas y hacer un análisis de convergencia promisorio. No obstante, Los resultados numéricos obtenidos en este trabajo son aceptables y están en concordancia con los resultados publicados en la bibliografía especializada en el tema.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de la Universidad Nacional de Córdoba (a través de SeCyT) y al Departamento de Estructuras (FCEFyN).

REFERENCIAS

- Borden M., Verhoosel C., Scott M., Hughes T., y Landis C. A phase-field description of dynamic brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 220:77–95, 2012.
- Bourdin B., Francfort G., y Marigo J.J. The variational approach to fracture. *J. Elast.*, 91:5–148, 2008.
- Crisfield M. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics, volume II. Jhon Wiley Sons, Ltd., 1997.
- Francfort G. y Marigo J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids*, 46:1319–1342, 1998.
- Griffith A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A*, 221:163–198, 1921.
- Hu Z., Zhang Z., Zhou X., Cui X., Ye H., Zhang H., y Zheng Y. Explicit phase-field material point method with the convected particle domain interpolation for impact/contact fracture in elastoplastic geomaterials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 405:115851, 2023.
- Kakouris E. y Triantafyllou S. Phase-field material point method for dynamic brittle fracture with isotropic and anisotropic surface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 357:112503, 2019.
- Krueger R. Virtual crack closure technique: history, approach, and applications. *Appl. Mech. Rev.*, 57:109–143, 2004.
- Miehe C., Hofacker M., y Welschinger F. A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:2765–2778, 2010.
- Moutsanidis G., Long C., y Bazilevs Y. Iga-mpm: The isogeometric material point method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 372:113346, 2020.
- Moës N., Dolbow J., y Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150, 1999.
- Sulsky D., Chenb Z., y Schreyer H. A particle method for history-dependent materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 118:179–196, 1994.
- Zhang Z., Qiu Y., Hu Z., Zhang H., y Zheng Y. Explicit phase-field total lagrangian material point method for the dynamic fracture of hyperelastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 398:115234, 2022.