

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTO FINITO Y GALERKIN LIBRE DE ELEMENTOS MEJORADO SUPERPUESTO A LA ELASTICIDAD LINEAL

APPLICATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD AND IMPROVED OVERLAPPING ELEMENT-FREE GALERKIN TO LINEAR ELASTICITY

Javier A. Zambrano^a, Juan C. Álvarez Hostos^b, Santiago Serebrinsky^c y Alfredo E. Huespe^a

^aCIMEC-UNL-CONICET, Guemes 3450, CP 3000 Santa Fe, Argentina,
zambranoj88@cimec.unl.edu.ar, jchostos@cimec.unl.edu.ar, ahuespe@cimec.unl.edu.ar,
<https://cimec.conicet.gov.ar/>

^bCentro de Investigación y Transferencia (CIT) Rafaela (UNRaf), Bv. Roca 989, CP 2300 Santa Fe,
Argentina, citrafaela@conicet.gov.ar, <https://citrafaela.conicet.gov.ar/>

^cYPF Tecnología S.A. (Y-TEC-CONICET), santiago.serebrinsky@ypftecnologia.com,
<https://y-tec.com.ar/>

Palabras clave: Galerkin libre de elementos mejorado superpuesto, Método de elemento finito, Malla de fondo FEM, Distribución superpuesta de nodos, Elasticidad lineal.

Resumen. En este trabajo se presenta un enfoque innovador para resolver problemas de elasticidad lineal mediante una técnica híbrida que combina el método de elemento finito (FEM) y el método de Galerkin libre de elementos mejorado (IEFG). El método Ov-IEFG-FEM propuesto utiliza FEM en toda la geometría del problema y emplea nodos superpuestos para realizar aproximaciones de orden superior en regiones que requieren mayor precisión utilizando IEFG. Los dominios superpuestos transfieren iterativamente información cinemática a través de fronteras inmersas bien definidas. Los resultados muestran que esta técnica es adecuada y fiable para resolver problemas de elasticidad lineal de manera precisa y sencilla.

Keywords: Improved overlapping element-free Galerkin, Finite element method, FEM background mesh, Overlapping node distribution, Linear elasticity.

Abstract. This work presents an innovative approach for solving linear elasticity problems using a hybrid technique that combines the finite element method (FEM) and the improved element-free Galerkin method (IEFG). The proposed Ov-IEFG-FEM method utilizes FEM throughout the entire problem geometry and employs overlapping nodes to perform higher-order approximations in regions that require greater accuracy using IEFG. The overlapping domains iteratively transfer kinematic information through well-defined immersed boundaries. The results demonstrate that this technique is suitable and reliable for solving linear elasticity problems accurately and simply.

1. INTRODUCCIÓN

Los métodos sin malla están ganando un creciente interés en el área de la mecánica computacional, siendo ampliamente utilizados en muchas aplicaciones de ingeniería, ya que estos métodos solo requieren un conjunto de nodos para representar el dominio del problema, lo que los hace ideales para modelar problemas relacionados con grandes deformaciones ([Rabczuk y Belytschko \(2007\)](#)), daño material ([Guamatsia et al. \(2009\)](#)), fronteras móviles ([Alvarez-Hostos et al. \(2023\)](#)), materiales disímiles o estratificados ([Pathak et al. \(2011\)](#)), iniciación, nucleación y crecimiento de grietas ([Bordas et al. \(2008\)](#)). Entre los métodos sin malla desarrollados hasta ahora, el método de Galerkin libre de elementos (EFGM por sus siglas en inglés) ha ganado popularidad debido a su aplicabilidad exitosa en diferentes áreas dentro de la mecánica computacional, como la dinámica de fluidos ([Alvarez Hostos et al. \(2020\)](#)), la mecánica de sólidos no lineales ([Alvarez-Hostos et al. \(2016\)](#)), problemas de transferencia de calor con cambio de fase ([Alvarez-Hostos et al. \(2019\)](#)), y fronteras móviles ([Wessels et al. \(2018\)](#)), entre otros. Este método tienen las siguientes características ([Liu \(2009\)](#)): (i) la posibilidad de lograr fácilmente aproximaciones de orden superior con derivadas continuas en comparación con FEM y otras técnicas basadas en mallas, y (ii) una mayor flexibilidad para agregar o eliminar nodos. La primera característica permite una implementación directa del enriquecimiento de funciones de forma intrínsecas para mejorar la precisión cerca de singularidades, como puntas de grietas ([Pant et al. \(2010\)](#)), mientras que la segunda característica hace que el método sea adecuado para abordar problemas con dominios variables ([Chen y Duan \(2020\)](#)) y fronteras móviles ([Wang et al. \(2012\)](#)) de una manera sencilla. Otras ventajas notables del EFGM residen en su tasa de convergencia, que a menudo supera la del método elementos finitos ([Liu \(2009\)](#)). Además, EFGM puede lograr alta precisión en la captura de gradientes locales marcados. Asimismo, EFGM elimina la necesidad de postprocesamiento para lograr deformaciones, tensiones u otras variables de campo continuas debido a su continuidad inherente en las funciones de forma y sus derivadas espaciales ([Liu \(2009\)](#)). En contraste, lograr esta continuidad en FEM es un desafío y típicamente requiere el uso de elementos finitos altamente complejos con numerosas incógnitas nodales o postprocesamiento para manejar los campos de derivadas discontinuas producidas por elementos más simples ([Bathe \(2006\)](#)). Estas características particulares han promovido fuertemente la implementación de EFGM en la solución de problemas de mecánica de sólidos cada vez más complejos.

Los aspectos discutidos hasta ahora ponen en una perspectiva adecuada el potencial de las técnicas EFG para resolver problemas de mecánica de sólidos tanto lineales como no lineales de manera sencilla, proporcionando también una mayor precisión. Sin embargo, es bien sabido que el EFGM tiende a ser computacionalmente más costoso que FEM para realizar una tarea dada. Esta limitación específica ha llevado al desarrollo de técnicas híbridas EFGM-FEM dirigidas a mejorar la eficiencia computacional, ya que estos enfoques están concebidos principalmente para confinar la implementación del EFGM a regiones específicas que demandan aproximaciones de orden superior para proporcionar una buena precisión. La mayoría de los procedimientos de acoplamiento EFGM-FEM reportados en la literatura reciente involucran regiones previamente bien especificadas para ser discretizadas mediante FEM y EFGM, con una relación topológica prescrita para ser adecuadamente acopladas. [Rohit et al. \(2019\)](#) presentaron una revisión sobre la implementación en las últimas décadas de los procedimientos acoplados entre métodos sin malla y FEM que han surgido como una nueva alternativa en los métodos computacionales con logros importantes. Además, se analizó el notable progreso en la resolución de las principales deficiencias de los métodos convencionales y los métodos sin malla en fases prematuras. Parti-

cularmente, se ha encontrado que los métodos híbridos EFGM-FEM son útiles en la mecánica de fractura elástica lineal y en el modelado de crecimiento de grietas en materiales dúctiles y frágiles. La mayoría de los procedimientos híbridos EFGM-FEM requieren elementos de interface que utilizan funciones de rampa para una transición sin problemas entre las regiones FEM y EFGM, por lo que la implementación de estos enfoques en escenarios que involucran geometrías de topología compleja puede ser muy desafiante. Sin embargo, algunos autores han logrado recientemente realizar tal acoplamiento sin la necesidad de elementos de transición. [Ullah et al. \(2013\)](#) desarrollaron un novedoso procedimiento de acoplamiento adaptativo basado en el error EFGM-FEM para problemas de mecánica de sólidos lineales, no lineales y dependientes de la trayectoria. Las funciones de forma para las aproximaciones EFGM se construyeron mediante la formulación de máxima entropía, permitiendo el cumplimiento de la propiedad delta de Kronecker. Esta característica particular no solo ha permitido la imposición de condiciones de contorno de Dirichlet en forma de valores nodales prescritos, sino que también ha eliminado la necesidad de elementos de interface en el acoplamiento entre las regiones EFGM y FEM.

A pesar de las ventajas presentadas por las soluciones numéricas híbridas basadas en EFGM-FEM, estos métodos de acoplamiento todavía requieren fronteras de transición bien definidas en áreas donde el EFGM y FEM comparten nodos comunes. Para abordar este tipo de necesidades de relación topológica en procedimientos de acoplamiento de dominios, se han desarrollado métodos de dominios superpuestos de tipo chimera en el contexto de métodos sin malla. [Alvarez Hostos et al. \(2022\)](#) introdujeron recientemente uno de los primeros enfoques superpuestos basados en métodos sin malla, utilizando la técnica de Galerkin libre de elementos mejorada superpuesta (Ov-IEFG por sus siglas del inglés *overset improved element-free Galerkin*). Esta técnica, concebida en principio para abordar problemas de conducción de calor transitoria con fuentes de calor en movimiento, se realiza con una disposición fina de nodos que sigue la trayectoria de la fuente de calor sobre una distribución gruesa de nodos que representa todo el dominio del problema. Aunque el Ov-IEFG tiene el potencial para un fácil acoplamiento entre los dominios superpuestos, todavía presenta desafíos en términos del costo computacional porque utiliza EFG en ambos dominios. En este sentido, un procedimiento superpuesto que use aproximaciones EFG solo en regiones que demandan alta precisión numérica sería muy útil. Para abordar este aspecto, [Alvarez-Hostos et al. \(2024\)](#) desarrollaron el Ov-IEFG-FEM (del inglés *overset improved element-free Galerkin-finite element method*). Esta técnica híbrida sin malla/con malla ha sido desarrollada e implementada inicialmente en el contexto de problemas de conducción de calor transitoria con fuentes de calor en movimiento, utilizando una distribución fina de nodos que se mueven con la fuente de calor y se superponen con una malla gruesa que discretiza la geometría del dominio completo. Basándose en el potencial del Ov-IEFG-FEM para resolver problemas con gradientes marcados en pequeñas regiones móviles, el enfoque de este trabajo se centra en realizar una extensión adecuada de las características positivas de esta técnica a la solución de problemas de elasticidad lineal que exhiben tales características.

2. METODOLOGIA Y RESULTADOS

Se resolverán problemas de referencia de elasticidad lineal mediante el Ov-IEFG-FEM, cuya representación esquemática se puede observar en la Fig. 1 para un dominio arbitrario Ω con frontera Γ . Todo el dominio del problema se discretiza con una malla de fondo gruesa para realizar cálculos basados en FEM, mientras que un dominio superpuesto representado por una distribución fina de nodos se utiliza para enriquecer la solución en un área específica mediante el método IEFG para lograr aproximaciones de orden superior. El dominio Ω de la Fig. 1 está ocupado por un sólido elástico lineal isótropo sometido a un conjunto de condiciones de Diri-

chlet y Neumann en las fronteras no superpuestas Γ_u y Γ_t ($\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$), respectivamente. La deformación del sólido está gobernada por la forma cuasi-estática del balance de cantidad lineal de movimiento:

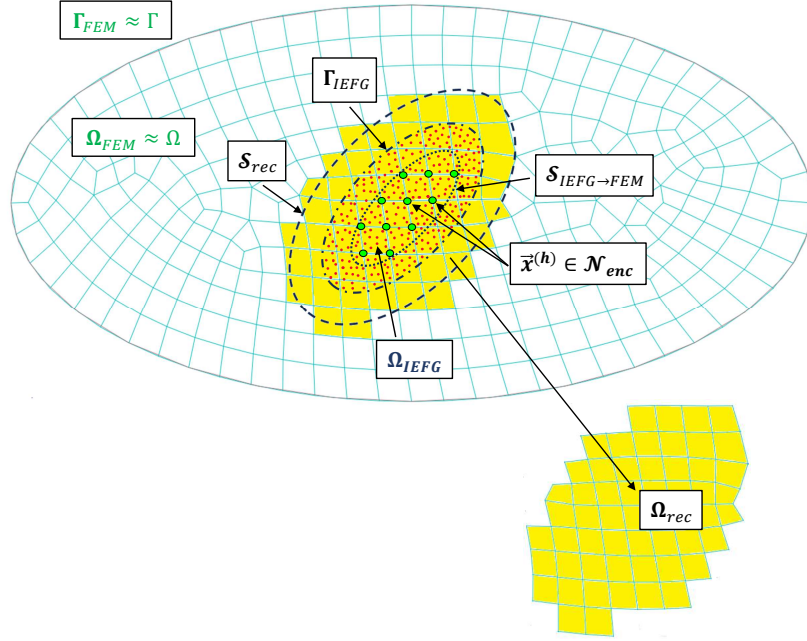


Figura 1: Representación del dominio del problema para una solución numérica realizada mediante el Ov-IEFG-FEM propuesto.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

donde $\mathbf{f}$ es la densidad de fuerza del cuerpo y $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy, que para un sólido elástico lineal isótropo bajo pequeñas deformaciones está dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu (\nabla \mathbf{u} + [\nabla \mathbf{u}]^T) + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}, \quad (2)$$

donde $\mu = E/[2(1 + \nu)]$ y $\lambda = E\nu/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$ son las constantes de Lamé, mientras que $\mathbf{I}$ es el tensor identidad de segundo orden y $\mathbf{u}$ es el campo de desplazamientos. Las constantes de Lamé se dan en términos del módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν . La solución de (1) está sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D \quad \text{en } \Gamma_u, \quad \text{y} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \mathbf{t} \quad \text{en } \Gamma_t, \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\mathbf{u}_D$ es el desplazamiento que se va a imponer en Γ_u , y $\mathbf{t}$ es el vector de tracción superficial en Γ_t . El Ov-IEFG-FEM está concebido para resolver las ecuaciones de gobierno del problema de elasticidad lineal descritas en los párrafos anteriores, construyendo una solución enriquecida única mediante un acoplamiento adecuado de los dominios superpuestos Ω_{FEM} y Ω_{IEFG} representados en la Fig. 1. Los resultados de la solución basada en FEM realizados en la malla de fondo que discretiza Ω_{FEM} se mantienen en las regiones fuera del dominio Ω_{IEFG} , representado por una distribución fina de nodos (mostrados en rojo en la Fig. 1) para enriquecer la solución mediante la técnica IEFG, mientras que la frontera Γ_{IEFG} y la superficie cerrada $\mathcal{S}_{IEFG \rightarrow FEM}$ están

destinadas a realizar la transferencia recíproca de información entre los dominios superpuestos Ω_{FEM} y Ω_{IEFG} . La frontera Γ_{IEFG} y la superficie cerrada $\mathcal{S}_{\text{IEFG} \rightarrow \text{FEM}}$ se representan con líneas negras discontinuas y punteadas, respectivamente. La solución basada en FEM se utiliza para calcular los desplazamientos que se impondrán en Γ_{IEFG} mediante el método de penalización, por lo que la solución realizada en Ω_{IEFG} mediante el método IEFG depende de los resultados obtenidos en la malla de fondo. A la inversa, la solución obtenida mediante la técnica IEFG en el dominio Ω_{IEFG} se utiliza para determinar los desplazamientos que se deben prescribir en el conjunto de nodos $\mathcal{N}_{\text{enc}}$ (representados en verde en la Fig. 1) de la malla de fondo encerrada por la superficie $\mathcal{S}_{\text{IEFG} \rightarrow \text{FEM}}$. Es importante destacar que los desplazamientos que se impondrán en Γ_{IEFG} se calculan a través de una reconstrucción local de alto orden de la solución basada en FEM, que se realiza en el dominio $\Omega_{\text{rec}} \subset \Omega_{\text{FEM}}$ construido con aquellos elementos finitos cuyos centros están encerrados por $\mathcal{S}_{\text{rec}}$. Estos elementos están representados en color amarillo en la Fig. 1, mientras que $\mathcal{S}_{\text{rec}}$ está representado por una línea negra discontinua en la misma figura. El acoplamiento entre las soluciones obtenidas en los dominios superpuestos Ω_{FEM} y Ω_{IEFG} consiste en la imposición segregada/recursiva de las siguientes restricciones cinemáticas:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}_{\text{IEFG}} \quad \text{en} \quad \mathbf{x}^{(h)}, \quad h \in \mathcal{N}_{\text{enc}}, \quad \text{y} \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}_{\text{FEM}} \quad \text{en} \quad \Gamma_{\text{IEFG}}, \end{aligned} \quad (4)$$

donde $\bar{\mathbf{u}}_{\text{IEFG}}$ corresponde a los desplazamientos calculados en los nodos $h \in \mathcal{N}_{\text{enc}}$ utilizando la solución realizada en Ω_{IEFG} mediante la técnica IEFG, mientras que $\bar{\mathbf{u}}_{\text{FEM}}$ son los desplazamientos calculados en Γ_{IEFG} utilizando las aproximaciones IMLS (del inglés *improved moving least squares*) obtenidas a partir de la reconstrucción local realizada con el conjunto $\mathcal{N}_{\text{enc}}$ de nodos pertenecientes a los elementos incluidos en Ω_{rec} . Este procedimiento establece la dependencia recíproca entre las soluciones obtenidas tanto en la malla de fondo Ω_{FEM} como en la distribución fina de nodos que representa el dominio Ω_{IEFG} . Los desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}_{\text{IEFG}}$ que se deben imponer en los nodos $h \in \mathcal{N}_{\text{enc}}$ se calculan mediante las aproximaciones IMLS relativas a la solución realizada a través de la técnica IEFG en la distribución fina de nodos que representa el dominio superpuesto Ω_{IEFG} , mientras que los desplazamientos $\bar{\mathbf{u}}_{\text{FEM}}$ que se imponen en Γ_{IEFG} se calculan a partir de la reconstrucción local basada en IMLS del problema mecánico resuelto en la malla de fondo Ω_{FEM} mediante FEM. Para información más detallada con respecto a la formulación del Ov-IEFG-FEM y su procedimiento algorítmico consultar [Alvarez-Hostos et al. \(2024\)](#).

Se modela como primer problema de referencia una placa infinita con un agujero centrado de radio R , como se esquematiza en la Fig. 2 (a). La placa está sometida a una tracción superficial horizontal uniformemente distribuida $\sigma_{xx}|_{\infty} = T = 1000$ Pa en $x = \infty$. Las propiedades mecánicas utilizadas son: el módulo de Young $E = 210$ GPa y la relación de Poisson $\nu = 0,3$. Las soluciones exactas para el campo de tensión en este problema se dan a continuación ([Duan et al. \(2014\)](#)):

$$\sigma_{xx} = T \left\{ 1 - \frac{R^2}{r^2} \left[\frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right] + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right\} \quad (5)$$

$$\sigma_{yy} = -T \left\{ \frac{R^2}{r^2} \left[\frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right] + \frac{3a^4}{2r^4} \cos(4\theta) \right\} \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = -T \left\{ \frac{R^2}{r^2} \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right] - \frac{3a^4}{2r^4} \sin(4\theta) \right\}, \quad (7)$$

donde las componentes de tensión cartesianas se han expresado en términos de las coordenadas polares con el propósito de concisión matemática en las que: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$

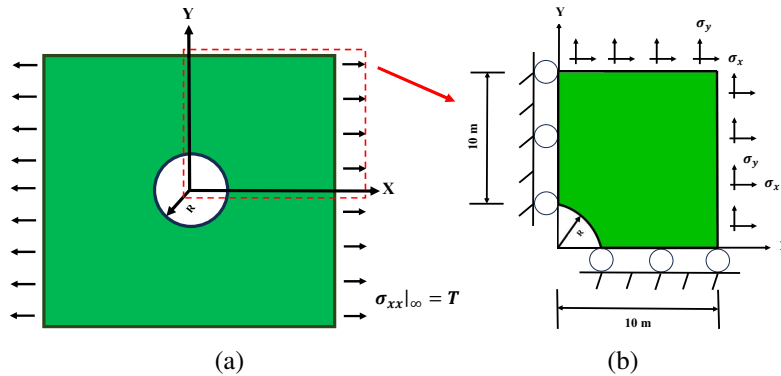


Figura 2: Representación de la geometría y las condiciones de contorno para una placa infinita con un agujero centrado.

Debido a la simetría que posee este problema, las soluciones se realizaron utilizando solo el cuarto superior derecho de la placa. Este cuarto tiene dimensiones finitas de $10 \times 10 \text{ m} \times \text{m}$ con un radio de agujero de $R = 1 \text{ m}$. Está restringido con desplazamientos $u_x = 0$ a lo largo del eje $x = 0$ y $u_y = 0$ a lo largo del eje $y = 0$. Como se muestra en la Fig. 2 (b), las cargas superficiales para la solución numérica se han prescrito de acuerdo con (5) – (7) para reproducir adecuadamente el comportamiento de la placa infinita sometida a la tracción superficial remota uniforme. Tanto las mallas de fondo utilizadas para discretizar Ω_{FEM} como las distribuciones de nodos usadas para representar el dominio Ω_{IEFG} son no uniformes para este problema, como se observa en la Fig. 3. Dado que se espera que surjan concentraciones de tensiones significativas cerca del agujero de la placa, el dominio Ω_{IEFG} se ha colocado en dicha región para enriquecer la solución numérica. Por consiguiente, la componente de tensión σ_{xx} de la placa se presenta en la Fig. 4. Los resultados numéricos obtenidos mediante el Ov-IEFG-FEM muestran una excelente concordancia con la solución exacta, como se visualiza en los gráficos presentados en la Fig. 5 para las componentes de tensión σ_{xx} y σ_{yy} calculados a lo largo de la línea horizontal $(x, 0)$ y la componente de tensión τ_{xy} calculado a lo largo de una línea de 45° .

Como segundo modelo de referencia, se modeló una muestra a tensión con una muesca en un borde (SENT) por sus siglas en inglés con dimensiones $L = 0,2 \text{ m}$ de altura por $b = 0,05 \text{ m}$ de ancho, con una grieta horizontal predefinida de $0,025 \text{ m}$. El módulo de Young y la relación de Poisson son $E = 5,5 \text{ GPa}$ y $\nu = 0,25$. La muestra está sometida a una tracción superficial uniforme remota de $P = 100 \text{ MPa}$ en el borde superior de la geometría, como se muestra en la Fig. 6. Debido a la simetría de la muestra, el problema se modela considerando solo la mitad de la geometría. Por lo tanto, el dominio computacional utilizado en las pruebas numéricas tiene dimensiones finitas de $0,05 \times 0,1 \text{ m} \times \text{m}$. La mitad del borde inferior está restringida verticalmente para emular la longitud de la grieta y la esquina inferior derecha está cinemáticamente restringida para evitar movimientos de cuerpo rígido. Tanto la distribución de la componente de tensión σ_{yy} como los resultados numéricos obtenidos mediante el Ov-IEFG-FEM se pueden observar en la Fig. 7, la cual muestra en cuanto a las soluciones numéricas una buena concordancia con la solución de referencia desarrollada por Tada et al. (1973), para las diferentes componentes de tensión cerca de la punta de la grieta. Los resultados obtenidos utilizando el Ov-IEFG-FEM propuesto en este trabajo demuestran su efectividad en la resolución de pro-

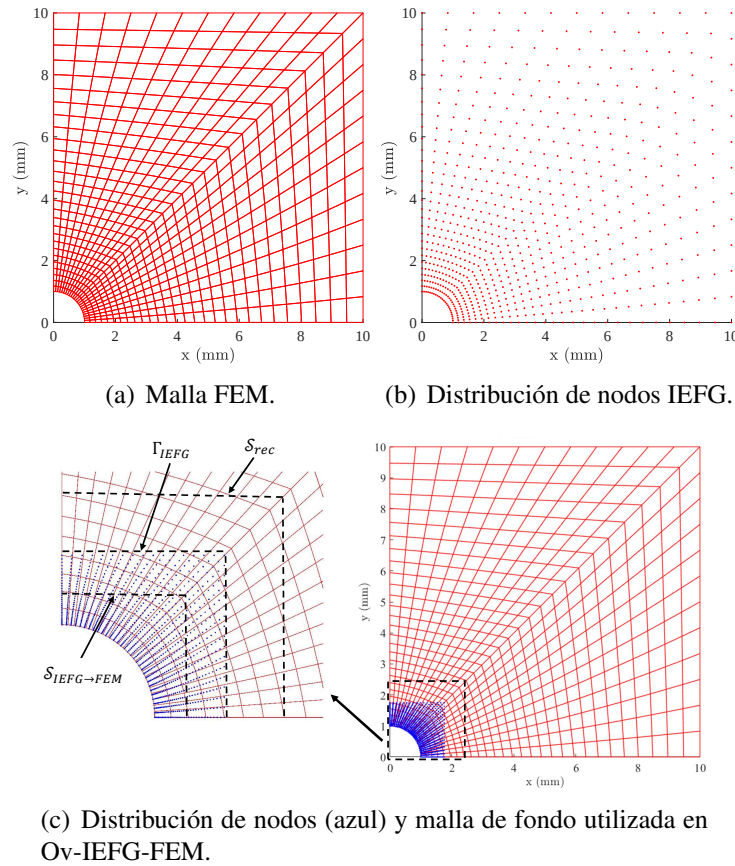


Figura 3: Mallas y distribuciones de nodos para una placa infinita con un agujero centrado.

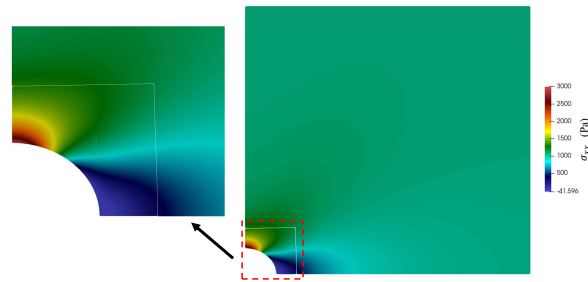


Figura 4: Distribución de la componente de tensión σ_{xx} obtenida mediante el Ov-IIEFG-FEM para el problema de la placa infinita con un agujero centrado.

blemas de elasticidad lineal, permitiendo un acople sin problemas entre los cálculos de FEM en Ω_{FEM} y las aproximaciones de orden superior de IIEFG realizadas en el dominio Ω_{IIEFG} para fines de enriquecimiento y mejora de la precisión. Esta afirmación se puede observar tanto en el problema de la placa infinita con un agujero centrado como en la muestra tipo SENT donde un acoplamiento suave se manifiesta entre las regiones FEM y IIEFG a lo largo de la frontera de transición Γ_{IIEFG} como se representa en las distribuciones de tensiones para ambos problemas en las Figs. 4 y 7a. Por ende, dichos resultados demuestran el potencial del Ov-IIEFG-FEM para lograr una excelente precisión de manera sencilla, mediante los cálculos a través de IIEFG que son adecuadamente realizados en las zonas donde se evidencian gradientes significativos con respecto a la variable de tensión, tanto en el área cercana al orificio de la placa infinita como

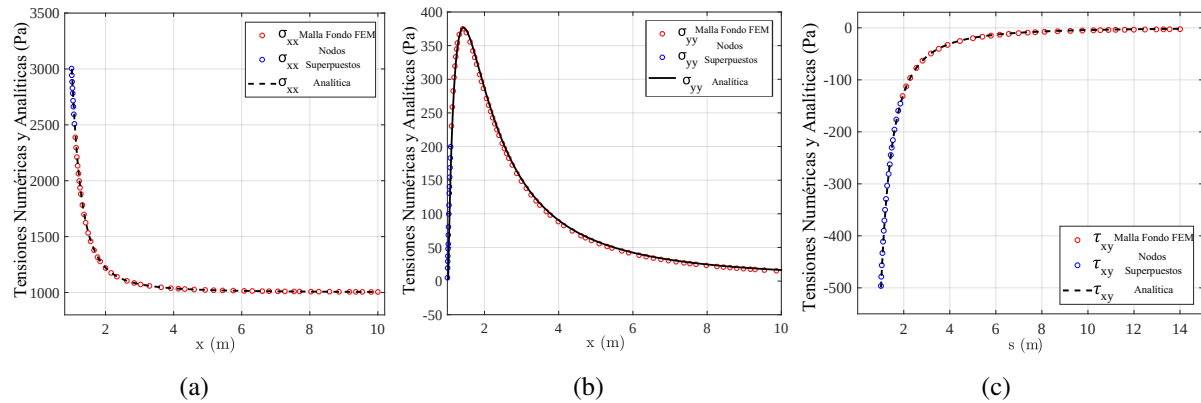


Figura 5: Componentes de tensión σ_{xx} , σ_{yy} y τ_{xy} obtenidas mediante el Ov-IEFG-FEM para el problema de la placa infinita con un agujero centrado.

en la punta de la grieta para la muestra tipo SENT. Además, cabe destacar que las mejoras introducidas por el Ov-IEFG-FEM se logran sin la necesidad de prescribir relaciones topológicas complejas entre la malla de fondo que discretiza Ω_{FEM} y la distribución fina de nodos que representa Ω_{IEFG} . Esta característica también permite su fácil implementación en problemas que involucran gradientes móviles marcados, como problemas de propagación de grietas, lo cual se logra simplemente posicionando adecuadamente Ω_{IEFG} según los cambios en la configuración del dominio del problema.

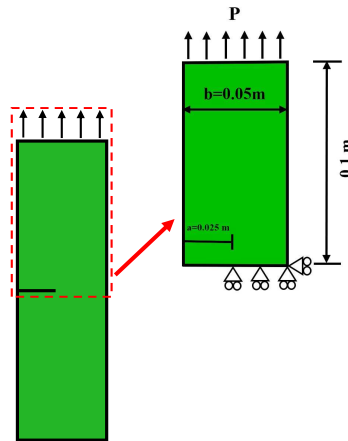


Figura 6: Geometría y condiciones de borde para la muestra tipo SENT.

3. CONCLUSIONES

El método de elemento finito y Galerkin libre de elementos mejorado superpuesto (Ov-IEFG-FEM) se ha implementado para resolver problemas de referencia de elasticidad lineal, demostrando su eficacia en acoplar sin problemas un dominio de fondo discretizado mediante una malla gruesa para los cálculos del Método de Elemento Finito (FEM) con un dominio tipo parche representado por una disposición fina de nodos para realizar aproximaciones de orden superior utilizando el método de Galerkin libre de elementos mejorado (IEFG) en regiones que requieren una mayor precisión. Este enfoque aprovecha particularmente el potencial del método

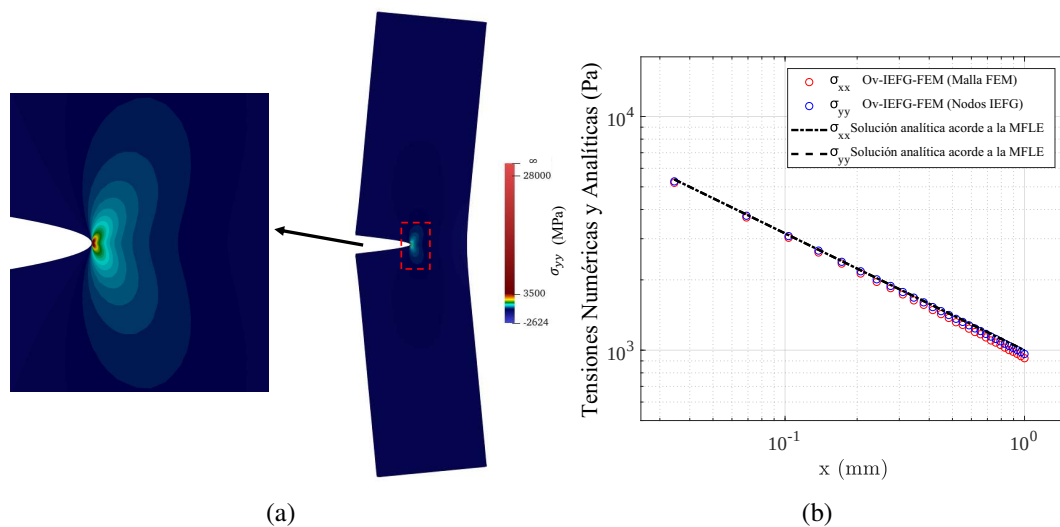


Figura 7: Distribución de la componente de tensión σ_{yy} y comparación de las soluciones numéricas obtenidas mediante el Ov-IEFG-FEM propuesto para la muestra tipo SENT.

IEFG para capturar concentraciones de tensiones significativas de manera notablemente simple, al tiempo que mitiga el costo computacional asociado al uso de métodos EFG en todo el dominio del problema. Al posicionar estratégicamente el dominio tipo parche sin malla cerca de las regiones con altos gradientes, se mejora la precisión de la solución numérica sin necesidad de reconfiguraciones extensas de nodos o adaptaciones de malla complejas. En conclusión, el Ov-IEFG-FEM ofrece una alternativa convincente para abordar los desafíos computacionales de los métodos IEFG tradicionales, proporcionando un marco robusto para mejorar la precisión numérica en la elasticidad lineal.

REFERENCIAS

- Alvarez Hostos J.C., Cruchaga M.A., Fachinotti V.D., Zambrano Carrillo J.A., y Zamora E. A plausible extension of standard penalty, streamline upwind and immersed boundary techniques to the improved element-free Galerkin-based solution of incompressible Navier–Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 372:113380, 2020. doi:10.1016/j.cma.2020.113380.
- Alvarez-Hostos J.C., Gutierrez-Zambrano E.A., Salazar-Bove J.C., Puchi-Cabrera E.S., y Bencomo A.D. Solving heat conduction problems with phase-change under the heat source term approach and the element-free Galerkin formulation. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 108:104321, 2019. doi:10.1016/j.icheatmasstransfer.2019.104321.
- Alvarez-Hostos J.C., Puchi Cabrera E.S., y Bencomo A.D. Stress Analysis of a Continuous Casting Process, on the Basis of the Element-Free Galerkin Formulation. *steel research international*, 88(2), 2016. doi:10.1002/srin.201600019.
- Alvarez Hostos J.C., Storti B., Tourn B.A., y Fachinotti V.D. Solving heat conduction problems with a moving heat source in arc welding processes via an overlapping nodes scheme based on the improved element-free Galerkin method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 192:122940, 2022. doi:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.122940.
- Alvarez-Hostos J.C., Tourn B., Zambrano-Carrillo J.A., Sarache-Piña A.J., Rondón-Silva L.A., Bencomo A.D., y Puchi-Cabrera E.S. A simple staggered approach for comprehensive analysis of forced convection heat transfer using the improved element-free Galerkin–reduced in-

- tegration penalty method to solve the fluid dynamics problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 150:672–696, 2023. doi:10.1016/j.enganabound.2023.02.047.
- Alvarez-Hostos J.C., Ullah Z., Storti B.A., Tourn B.A., y Zambrano-Carrillo J.A. An over-set improved element-free Galerkin-finite element method for the solution of transient heat conduction problems with concentrated moving heat sources. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 418:116574, 2024. doi:10.1016/j.cma.2023.116574.
- Bathe K.J. *Finite element procedures*. Klaus-Jürgen Bathe, [Boston, Mass.], 2006. ISBN 9780979004902.
- Bordas S., Rabczuk T., y Zi G. Three-dimensional crack initiation, propagation, branching and junction in non-linear materials by an extended meshfree method without asymptotic enrichment. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(5):943–960, 2008. doi:10.1016/j.engfracmech.2007.05.010.
- Chen S. y Duan Q. An adaptive second-order element-free Galerkin method for additive manufacturing process. *Computational Materials Science*, 183:109911, 2020. doi:10.1016/j.commatsci.2020.109911.
- Duan Q., Wang B., Gao X., y Li X. Quadratically consistent nodal integration for second order meshfree Galerkin methods. *Computational Mechanics*, 54(2):353–368, 2014. doi:10.1007/s00466-014-0989-1.
- Guimatsia I., Falzon B.G., Davies G.A.O., y Iannucci L. Element-Free Galerkin modelling of composite damage. *Composites Science and Technology*, 69(15–16):2640–2648, 2009. doi:10.1016/j.compscitech.2009.08.005.
- Liu G.R. *Meshfree methods: moving beyond the finite element method*. CRC Press, second edición, 2009. doi:10.1201/9781420082104.
- Pant M., Singh I.V., y Mishra B.K. Numerical simulation of thermo-elastic fracture problems using element free Galerkin method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(12):1745–1755, 2010. doi:10.1016/j.ijmecsci.2010.09.008.
- Pathak H., Singh A., y Singh I.V. Numerical simulation of bi-material interfacial cracks using EFGM and XFEM. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 8(1):9–36, 2011. doi:10.1007/s10999-011-9173-3.
- Rabczuk T. y Belytschko T. A three-dimensional large deformation meshfree method for arbitrary evolving cracks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(29–30):2777–2799, 2007. doi:10.1016/j.cma.2006.06.020.
- Rohit G.R., Prajapati J.M., y Patel V.B. Coupling of Finite Element and Meshfree Method for Structure Mechanics Application: A Review. *International Journal of Computational Methods*, 17(04):1850151, 2019. doi:10.1142/s0219876218501517.
- Tada H., Paris P.C., y Irwin G.R. *The stress analysis of cracks*. Handbook, Del Research Corporation, 1973.
- Ullah Z., Coombs W.M., y Augarde C.E. An adaptive finite element/meshless coupled method based on local maximum entropy shape functions for linear and nonlinear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 267:111–132, 2013. doi:10.1016/j.cma.2013.07.018.
- Wang X., Ouyang J., Yang B., Ren J., y Jiang T. Simulating free surface flow problems using hybrid particle element free Galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(3):372–384, 2012. doi:10.1016/j.enganabound.2011.09.005.
- Wessels H., Weißenfels C., y Wriggers P. Metal particle fusion analysis for additive manufacturing using the stabilized optimal transportation meshfree method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 339:91–114, 2018. doi:10.1016/j.cma.2018.04.042.