

EL MODELO DE BICICLETA Y EL EMPLEO DE TELEMETRÍA REAL EN LA ENSEÑANZA DE DINÁMICA VEHICULAR DE COMPETICIÓN

THE BICYCLE MODEL AND THE USE OF REAL TELEMETRY IN TEACHING RACE CAR VEHICLE DYNAMICS

Martín A. Pucheta^a, Alberto Cardona^b, José M. Risso^c y Javier Ciabattari^d

^aCONICET y Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería (CIII), Fac. Reg. Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional, Maestro López esq. Cruz Roja Argentina, X5016ZAA Córdoba, Argentina, mpucheta@frc.utn.edu.ar, <http://ciii.frc.utn.edu.ar>

^bCentro de Investigación en Métodos Computacionales (Universidad Nacional del Litoral y CONICET), Predio CONICET Santa Fe “Dr. Alberto Cassano” Colectora RN168, Km 0, Paraje “El Pozo”, S3000GLN Santa Fe, Argentina, acardona@cimec.unl.edu.ar, <https://cimec.conicet.gov.ar/>

^cDesarrollos Industriales S.A., J. L. Caula 2875, Área Industrial PAER, Rafaela, Prov. de Santa Fe, Argentina, jrisso@desarrollosindustriales.com, <https://desarrollosindustriales.com/>

^dFDC Diseños y Desarrollos S.R.L., Ruta C45 Km10,75, X5187 Falda del Carmen, Prov. de Córdoba, Argentina, jciabattari@fdceng.com, <https://fdceng.com/>

Palabras Clave: Modelo de bicicleta, telemetría, dinámica vehicular, automóviles de competición.

Resumen. El modelo de bicicleta de un automóvil es una simplificación de gran importancia que permite tener un conocimiento inicial de su estabilidad. Se modela como ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que se pueden analizar tanto en forma analítica como numérica; esto no es así para el vehículo completo, el cual requiere del empleo de métodos numéricos exclusivamente. Los parámetros intervinientes permiten caracterizar la estabilidad del vehículo con validez para bajas velocidades. En este trabajo se presenta el empleo de telemetría de un vehículo real de competición (velocidad y ángulo de dirección) en un modelo de bicicleta y se analizan estados observados no disponibles en la telemetría.

Keywords: Bicycle model, telemetry, vehicle dynamics, racing cars.

Abstract. The bicycle model of a car is a very important simplification that allows us to have an initial understanding of its stability. It is modeled as coupled ordinary differential equations that can be analyzed both analytically and numerically; this is not the case for the complete vehicle, which requires the use of numerical methods exclusively. The parameters involved allow us to characterize the stability of the vehicle with validity for low speeds. This work presents the use of telemetry from a real competition vehicle (speed and steering angle) in a bicycle model and observed states not available in telemetry are analyzed.

1. INTRODUCCIÓN

El modelo de bicicleta representa a un vehículo de dos ruedas en línea y con dirección que permite iniciar estudios de dinámica vehicular y su estabilidad direccional. El modelo puede extenderse y complejizarse para incluir más grados de libertad como el rolido y estudiar vehículos de dos ruedas como bicicletas, monopatinés y motocicletas. Conocer las hipótesis y limitaciones del modelo, que es la mínima expresión de un vehículo con dirección, permite ir estudiando el modelado de vehículos más complejos en donde el comportamiento en el plano es análogo, como triciclos y vehículos de cuatro o más ruedas. El modelo de bicicleta de un automóvil es una simplificación de gran importancia que permite tener un conocimiento inicial de la estabilidad del vehículo (Milliken and Milliken, 1995; Guiggiani, 2014; Gillespie, 2021). Si bien el modelo generalmente carece de ciertos grados de libertad de rotación, de suspensión e influencia de autoblocante, permite relacionar el posicionamiento del centro de gravedad del vehículo y la dirección con sus estados. Es decir, permite tener una primera aproximación de la estabilidad direccional para rangos lineales de ciertos parámetros.

En la literatura disponible para la enseñanza de dinámica vehicular, el modelo de bicicleta inicia los capítulos de base para modelar vehículos y estudiar la estabilidad en curva. En la literatura clásica el modelo aparece luego de las explicaciones de ejes y sistemas coordenados, geometría de dirección, neumáticos y fuerzas aerodinámicas; algunos ejemplos son el Cap. 6 en Milliken and Milliken (1995), el Cap. 3 en Guiggiani (2014) y el Cap. 6 en Gillespie (2021). Como iniciación al modelado matemático, permite introducir el concepto de acoplamiento de (i) *ecuaciones de congruencia* de la geometría de la dirección y los ángulos de deriva en el vehículo y en los neumáticos, (ii) *ecuaciones constitutivas* en los neumáticos y (iii) *ecuaciones del movimiento* del cuerpo rígido en el plano. Asumiendo ciertas simplificaciones, estas ecuaciones que deben cumplirse simultáneamente se pueden sustituir hasta poderse analizar en forma analítica como un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes. Se puede llegar a una forma analítica a través de sucesivas simplificaciones y linealizaciones; esto no ocurre en el modelo de vehículo completo, pero el procedimiento sirve para considerar qué simplificaciones deben abandonarse. Los parámetros de diseño del vehículo y las variables de movimiento intervinientes permiten caracterizar la estabilidad direccional del vehículo con validez para bajas velocidades (Lukowsky, 2009). El vehículo completo requiere del empleo de métodos numéricos exclusivamente.

En este trabajo se muestra que una vez obtenido un modelo numérico de vehículo, se puede experimentar incluyendo la no linealidad de neumáticos, cargas aerodinámicas concentradas y datos reales de telemetría. Se presenta el empleo de telemetría de un vehículo real de competición (velocidad y ángulo de dirección) en un modelo de bicicleta y se describen las diferencias que se aprecian entre la respuesta del modelo con el vehículo real, además se analizan estados observados no disponibles en la telemetría, difíciles o costosos de medir como son las derivadas de neumático y vehículo.

El análisis permite establecer un punto de inflexión entre limitaciones analíticas y numéricas de la dinámica vehicular, así como valorar la importancia del análisis de estados pseudo estacionarios (Pucheta et al., 2016), el análisis de estabilidad para altas velocidades, las simulaciones dinámicas de sistemas multicuerpo completos de los vehículos y el empleo de la telemetría de vehículos de competición (Pütz and Serné, 2022), tanto para procesar canales matemáticos como para alimentar modelos numéricos de simulación.

2. MODELO DE BICICLETA

Para el modelado matemático de vehículos, se debe tener el cuidado inicial que requiere cualquier sistema mecánico: Definir una convención de terna inercial y móvil sujeta al cuerpo de interés, definir así las coordenadas y sus signos para describir unívocamente la cinemática. Para el estudio de la estabilidad direccional, el vehículo se considera simétrico con movimiento plano y con una terna adosada al centro de gravedad del vehículo (CG) con convención de signos SAE (por las siglas en inglés de Society of Automotive Engineers). En el movimiento en curva, existe un centro instantáneo de rotación (CIR) al cual concurren las normales de todos los vectores velocidad del vehículo. De interés particular, serán los vectores velocidad en tres puntos del “chasis”: el centro de la rueda trasera, el centro de gravedad del vehículo y el centro de la rueda delantera.

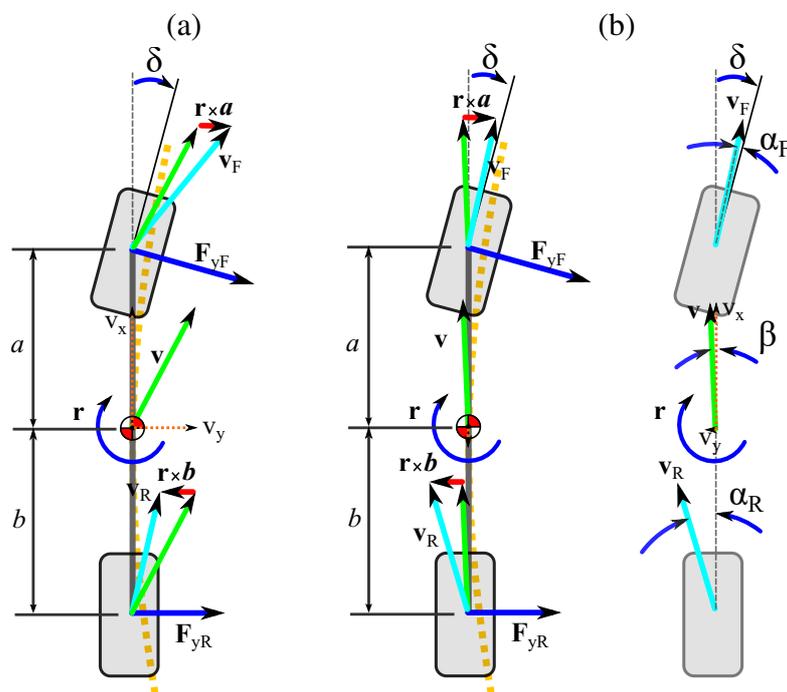


Figura 1: Esquemas de modelos de bicicletas con sus variables: (a) todas positivas para la formulación, (b) caso físicamente posible.

Se deben resolver simultáneamente ecuaciones de congruencia, ecuaciones constitutivas y las ecuaciones del movimiento, obtenidas vía Dinámica de Lagrange o aplicando segunda Ley de Newton al diagrama de cuerpo libre. Veremos simplificaciones para el tratamiento analítico y numérico. Para la formulación se debe tener cuidado en los signos. Para el planteo de las ecuaciones se consideran a todas las variables angulares y componentes de vectores con signos positivos como se muestra en la Fig. 1(a), aunque no representen una física posible. Luego, al resolver el conjunto de ecuaciones, el resultado respetará la física en la forma que muestra la Fig. 1(b), donde para una condición estacionaria en curva los ángulos de deriva son negativos y “atrasan” a las llantas en ambas ruedas. En una maniobra de transitorios de cambio de carril, o en movimientos de cambio de signo de la dirección, estos ángulos cambian y hasta pueden ser instantáneamente nulos o adelantar a la llanta. La física demuestra que el vehículo tiene un único CIR que puede moverse en el plano y definir derivas en el CG positivas, negativas o neutras. Un vehículo estable tiende por sí solo a retornar a derivas neutras.

2.1. Ecuaciones de congruencia

El estado del vehículo está definido por la posición y velocidad. La velocidad en el plano posee dos componentes de traslación y una de rotación. Los vectores velocidad $\mathbf{V} = [v_x, v_y, 0]^T$ y $\boldsymbol{\Omega} = [0, 0, r]^T$ en el CG del vehículo, definen el centro instantáneo de rotación, donde se asumen velocidades bajas y de poca variabilidad

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \text{cte} \quad (1)$$

y ángulos de deriva del vehículo β pequeños, de modo que se simplifica a

$$\beta = \text{atan}(v_y/v_x) \approx v_y/v_x \quad (2)$$

Existen dos componentes de aceleración lateral debida a la acción acoplada de los estados (donde R es el radio de curva)

- debido a la velocidad angular de guiñada r (*yaw rate*)

$$a_{y1} = \frac{V^2}{R} = \frac{V}{R}V = rV \quad (3)$$

- debida a la tasa de cambio de la velocidad lateral (se asume β pequeño como en la Fig. 1(b))

$$a_{y2} = \dot{v}_y = \frac{d}{dt}(V \sin \beta) = V \underbrace{\cos \beta}_{\approx 1} \dot{\beta} \approx V \dot{\beta} \quad (4)$$

Sumando ambas contribuciones obtenemos la aceleración lateral

$$a_y = V(r + \dot{\beta}) \quad (5)$$

La deriva del neumático es el ángulo entre la velocidad y el plano longitudinal de la llanta de la rueda. Empleando el esquema de triángulos vectoriales mostrados en la Fig. 1(a), podemos hacer las simplificaciones siguientes:

- En la rueda trasera asumimos que α_R es pequeño y por lo tanto $\tan(\alpha_R) = v_{yR}/v_{xR}$ y $v_{xR} \approx v_x$, y que β es pequeño, por ello $\beta \approx v_y/v_x$ y $v_x \approx V$; de este modo:

$$\alpha_R = \text{atan}\left(\frac{v_{yR}}{v_{xR}}\right) \approx \underbrace{\frac{v_{yR}}{v_{xR}}}_{\approx v_x} \approx \frac{v_y - rb}{v_x} = \underbrace{\frac{v_y}{v_x}}_{\approx \beta} - \frac{rb}{v_x} \approx \beta - \frac{rb}{V} \quad (6)$$

- En la rueda delantera asumimos que α_F y $\delta + \alpha_F$ son pequeños y por lo tanto $\tan(\delta + \alpha_F) = v_{yF}/v_{xF}$ y $v_{xF} \approx v_x$, y que β es pequeño; de este modo:

$$\delta + \alpha_F = \text{atan}\left(\frac{v_{yF}}{v_{xF}}\right) \approx \underbrace{\frac{v_{yF}}{v_{xF}}}_{\approx v_x} \approx \frac{v_y + ra}{v_x} = \underbrace{\frac{v_y}{v_x}}_{\approx \beta} + \frac{ra}{v_x} \approx \beta + \frac{ra}{V} \quad (7)$$

$$\alpha_F \approx \beta + \frac{ra}{V} - \delta$$

2.2. Ecuaciones constitutivas (lineales)

Se asume una ley lineal para la generación de carga lateral del neumático con la deformación angular o deriva del neumático:

$$\begin{aligned} F_{yR} &= C_R \alpha_R \\ F_{yF} &= C_F \alpha_F \end{aligned} \quad (8)$$

Esto no es una simplificación severa ya que el neumático real tiene un rango de comportamiento lineal y en una competición real se lo lleva intencionalmente a los picos de fuerza en rangos que varía no linealmente con la deriva.

2.3. Ecuaciones del movimiento

La simplificación importante de este análisis es considerar que la fuerza lateral en la rueda delantera que es normal al plano de la rueda,

$$F_{yF} = C_F \alpha_F \underbrace{\cos(\delta)}_{\approx 1} \quad (9)$$

es la misma fuerza lateral aplicada en dirección normal al plano longitudinal del chasis, en dirección de su eje Y . Es decir, se asume $\cos(\delta) \approx 1$ para todo movimiento de la dirección y así, en el tren delantero se asume aplicada la fuerza $F_{yF} = C_F \alpha_F$.

El modelo tiene dos variables independientes (dos grados de libertad) :

- velocidad lateral v_y ó, como V es constante, se puede utilizar la deriva $\beta = v_y/V$
- velocidad de guiñada r (*yaw rate*)

Para hallar las ecuaciones de movimiento, se plantea el equilibrio en traslación lateral y en rotación. Siendo un modelo lineal de 2 GDL, la expresión de energía cinética es muy sencilla

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} I r^2 \quad (10)$$

donde se asume $V^2 \approx v_y^2$ (si se considera la dinámica longitudinal, se debe emplear $V^2 = v_x^2 + v_y^2$)

Las fuerzas externas que actúan sobre el modelo, son las correspondientes a las fuerzas sobre los neumáticos. Estas fuerzas son de tipo no conservativas pues no pueden ser integradas y sólo actúan en presencia de una velocidad. Podemos verlas como conjugadas a la velocidad de la deriva lateral en cada neumático:

$$\mathcal{V}_{nc} = v_{yF} F_{yF} + v_{yR} F_{yR} = (v_y + ra) F_{yF} + (v_y - rb) F_{yR} \quad (11)$$

Plantaremos el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V} \quad (12)$$

y las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir del principio de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \delta \mathcal{V}_{nc}] dt = 0 \quad (13)$$

donde $\mathbf{q} = [y; \theta]$, $\dot{\mathbf{q}} = [v_y; r]$ son los grados de libertad generalizados del vehículo y sus derivadas temporales, y

$$\delta \mathcal{V}_{nh} = \delta \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathcal{V}_{nh}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (14)$$

A partir de esta expresión se encuentran las ecuaciones del movimiento para el sistema:

$$\begin{cases} ma_y = F_{yF} + F_{yR} \\ I\dot{r} = F_{yF}a - F_{yR}b \end{cases} \quad (15)$$

Para la dinámica traslacional lateral (obtenida via Lagrange o 2da ley de Newton, se utiliza a_y de la Ec. (5)) en el lado izquierdo y en el lado derecho, se reemplazan las ecuaciones constitutivas de las fuerzas del neumático y luego las de congruencia de los ángulo de deriva, obteniendo

$$\begin{aligned} ma_y &= \sum F_y = F_{yF} + F_{yR} \\ &= C_F \alpha_F + C_R \alpha_R \\ &= C_F \left(\beta + \frac{ra}{V} - \delta \right) + C_R \left(\beta - \frac{rb}{V} \right) \\ &= (C_F + C_R)\beta + \frac{1}{V}(C_F a - C_R b)r - C_F \delta \end{aligned}$$

$$\boxed{mV(r + \dot{\beta}) = (C_F + C_R)\beta + \frac{1}{V}(C_F a - C_R b)r - C_F \delta} \quad (16)$$

Similarmente, para el momento de guiñada en la dinámica rotacional

$$\begin{aligned} I\dot{r} &= \sum M_z = F_{yF}a - F_{yR}b = C_F \alpha_F a - C_R \alpha_R b \\ &= \left[C_F \left(\beta + \frac{ra}{V} - \delta \right) \right] a - \left[C_R \left(\beta - \frac{rb}{V} \right) \right] b \end{aligned}$$

$$\boxed{I\dot{r} = (C_F a - C_R b)\beta + \frac{1}{V}(C_F a^2 + C_R b^2)r - C_F a \delta} \quad (17)$$

3. INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

El modelo de bicicleta representado por las ecuaciones del movimiento (EdM)

$$\begin{cases} mV(r + \dot{\beta}) = (C_F + C_R)\beta + \frac{1}{V}(C_F a - C_R b)r - C_F \delta \\ I\dot{r} = (C_F a - C_R b)\beta + \frac{1}{V}(C_F a^2 + C_R b^2)r - C_F a \delta \end{cases} \quad (18)$$

se puede reescribir como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en las variables (β, r) , con $V = cte$ y $\delta(t)$ una función de entrada

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \frac{1}{mV} \left[(C_F + C_R)\beta + \frac{1}{V}(C_F a - C_R b)r - C_F \delta \right] - r \\ \dot{r} = \frac{1}{I} \left[(C_F a - C_R b)\beta + \frac{1}{V}(C_F a^2 + C_R b^2)r - C_F a \delta \right] \end{cases} \quad (19)$$

Luego, factorizando términos en β , r y δ se obtiene

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \frac{1}{mV}(C_F + C_R)\beta + \left[\frac{1}{mV^2}(C_F a - C_R b) - 1 \right] r - \frac{C_F}{mV} \delta \\ \dot{r} = \frac{1}{I}(C_F a - C_R b)\beta + \frac{1}{IV} [(C_F a^2 + C_R b^2)] r - \frac{C_F a}{I} \delta \end{cases} \quad (20)$$

y se puede resolver para $\beta(t)$ y $r(t)$, tanto en forma analítica como numérica.

3.1. Enfoque de las Derivadas Analíticas

Este enfoque propuesto por [Milliken and Milliken \(1995\)](#), e inspirado en vehículos aéreos, parte de considerar a la fuerza lateral Y y el momento N de las fuerzas externas en las EdM como funciones de β , r y δ

$$\begin{cases} mV(r + \dot{\beta}) = (C_F + C_R)\beta + \frac{1}{V}(C_F a - C_R b)r - C_F \delta = Y(\beta, r, \delta) \\ I\dot{r} = (C_F a - C_R b)\beta + \frac{1}{V}(C_F a^2 + C_R b^2)r - C_F a \delta = N(\beta, r, \delta) \end{cases} \quad (21)$$

luego, se renombran a las pendientes o derivadas que multiplican cada variable como

$$\begin{cases} mV(r + \dot{\beta}) = \frac{\partial Y}{\partial \beta}\beta + \frac{\partial Y}{\partial r}r + \frac{\partial Y}{\partial \delta}\delta = Y_\beta\beta + Y_r r + Y_\delta \delta \\ I\dot{r} = \frac{\partial N}{\partial \beta}\beta + \frac{\partial N}{\partial r}r + \frac{\partial N}{\partial \delta}\delta = N_\beta\beta + N_r r + N_\delta \delta \end{cases} \quad (22)$$

donde las derivadas parciales son las constantes

$$\begin{cases} Y_\beta = C_F + C_R \\ Y_r = \frac{1}{V}(C_F a - C_R b) \\ Y_\delta = -C_F \\ N_\beta = C_F a - C_R b \\ N_r = \frac{1}{V}(C_F a^2 + C_R b^2) \\ N_\delta = -C_F a \end{cases}$$

cuyo efecto individual en la dinámica se estudia e ilustra en [Milliken and Milliken \(1995\)](#). La Tabla 1 clasifica el rol de las derivadas analíticas en acoplamiento, amortiguamiento y control. Todas dependen de las rigideces de los neumáticos, C_F y C_R . A neumáticos iguales, quedan dependiendo de la transferencia de peso longitudinal o posición del CG mediante a y b .

Acoplamiento	Amortiguamiento	Control
$N_\beta = C_F a - C_R b$ $Y_r = \frac{1}{V}(C_F a - C_R b)$	$N_r = \frac{1}{V}(C_F a^2 + C_R b^2)$ $Y_\beta = (C_F + C_R)$	$Y_\delta = -C_F$ $N_\delta = -C_F a$

Tabla 1: Rol de las derivadas en la dinámica

3.2. Otras formas de analizar las ecuaciones de gobierno

Las ecuaciones del sistema lineal, ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes, se pueden analizar ¹ en el dominio del tiempo (espacio de estados) o de la frecuencia (Laplace). En espacio de estados,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

¹Este análisis está adaptado del publicado por autor anónimo en internet, denominado “Memorandums of a Racecar Design Engineer”; accedido en abril de 2024, estuvo disponible hasta agosto de 2024.

se agrupan las variables en un vector de estados $\mathbf{x}(t) = [\beta, r]$ y con estos estados se pueden calcular salidas deseadas en $\mathbf{y}(t)$. Se asume un vector de entrada del conductor $\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}\delta(t)$ y $V = cte$. Llevar la ecuación del movimiento Ec. (22) a la forma $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ resulta en

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{Y_\beta}{mV} & \left(\frac{Y_r}{mV} - 1\right) \\ \frac{N_\beta}{I_z} & \frac{N_r}{I_z} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Y_\delta}{mV} \\ \frac{N_\delta}{I_z} \end{bmatrix} \delta \quad (23)$$

Los autovalores de \mathbf{A} definen el comportamiento del sistema y se obtienen de la ecuación característica, anulando el determinante de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} \frac{Y_\beta}{mV} - \lambda & \frac{Y_r}{mV} - 1 \\ \frac{N_\beta}{I_z} & \frac{N_r}{I_z} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &= \lambda^2 + \underbrace{\left(-\frac{N_r}{I_z} - \frac{Y_\beta}{mV}\right)}_{-\text{tr}(\mathbf{A})} \lambda + \underbrace{\left(\frac{N_\beta}{I_z} + \frac{Y_\beta N_r - Y_r N_\beta}{mV I_z}\right)}_{\det(\mathbf{A})} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Entonces, los autovalores de \mathbf{A} son las raíces de la ecuación característica (EC)

$$\boxed{I_z \lambda^2 + \underbrace{\left(-N_r - \frac{I_z Y_\beta}{mV}\right)}_{c_{eq}} \lambda + \underbrace{\left(N_\beta + \frac{Y_\beta N_r - Y_r N_\beta}{mV}\right)}_{k_{eq}} = 0} \quad (25)$$

Esta es equivalente a la de un sistema masa-resorte-mortiguador (MCK)

$$ms^2 + cs + k = m \left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} \right) = m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = 0$$

Similarmente al sistema MCK, para el modelo de bicicleta se obtienen relaciones análogas para la frecuencia natural, el período, la tasa de amortiguamiento ζ (adimensional), la frecuencia amortiguada y el amortiguamiento crítico, respectivamente:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_z}}, \quad T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}, \quad \zeta = \frac{c_{eq}}{2I_z\omega_n}, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad c_{crit} = 2\sqrt{k_{eq}I_z}. \quad (26)$$

De los coeficientes de la EC, Ec. (25), el *amortiguamiento equivalente* depende de las pendientes N_r y Y_β (confrontar Tabla 1)

$$c_{eq} = -N_r - \frac{I_z Y_\beta}{mV} = -\frac{1}{V}(C_F a^2 + C_R b^2) - \frac{I_z(C_F + C_R)}{mV} \quad (27)$$

mientras que la *rigidez equivalente* depende de 4 pendientes (2 están en el amortiguamiento y 2 de ellas, N_β e Y_r , se consideran de acople)

$$k_{eq} = N_\beta + \frac{Y_\beta N_r - Y_r N_\beta}{mV} = (C_F a - C_R b) + \frac{C_F C_R (a^2 + b^2) + 2C_F^2 C_R^2}{mV^2} \quad (28)$$

Los autovalores de \mathbf{A} , raíces de la ecuación característica $I_z \lambda^2 + c_{eq} \lambda + k_{eq} = 0$, se calculan analíticamente, por ejemplo, con la fórmula de Baskara $\lambda_{1,2} = (-c_{eq} \pm \sqrt{c_{eq}^2 - 4I_z k_{eq}})/(2I_z)$,

donde, el radicando se anula para el valor de amortiguamiento crítico $c_{eq}^2 = 4I_z k_{eq} \rightarrow c_{eq} = 2\sqrt{k_{eq}I_z}$. La estabilidad se puede asegurar si la parte real de ambos autovalores es negativa o en forma equivalente, en la ecuación (24), si $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$ y $\text{det}(\mathbf{A}) > 0$ (Guiggiani, 2014, Sec. 6.17). La parte imaginaria de los autovalores proviene del radical. La parte real proviene de $-c_{eq}/(2I_z)$. Entonces la estabilidad depende en primer lugar del signo de $c_{eq} = -N_r - \frac{I_z Y_\beta}{mV}$. Las pendientes que participan son ambas negativas ($N_r = \frac{1}{V}(C_F a^2 + C_R b^2) < 0$ y $Y_\beta = C_F + C_R < 0$), y los parámetros m, I_z, V son siempre positivos. Como el signo de c_{eq} es positivo, el sistema cumple una condición para ser estable. Luego, se debe evaluar la condición $\text{det}(\mathbf{A}) = 0$, de la cual se obtiene la *velocidad crítica* a partir de la cual es inestable, $V_{cr} = \sqrt{(C_F C_R l^2)/(C_F a - C_R b)}$, y existe cuando $C_F a - C_R b > 0$ y el vehículo es sobrevirante; a neumáticos iguales, existe cuando $a > b$. Estas consideraciones nos permiten alimentar un modelo numérico del vehículo con telemetría con V variable y diversas funciones del grado de control $\delta(t)$.

Las ecuaciones (19) se resuelven numéricamente mediante reducción de índice e integración mediante un algoritmo de la familia de Runge Kutta. A los fines pedagógicos, también se muestra cómo resolverlas utilizando matrices de estado en forma analítica para ciertas perturbaciones y con herramientas de Octave o Matlab®.

4. RESULTADOS

El modelo permite estudiar la estabilidad direccional en curva, también denominado *balance*. Es decir, permite conocer si el vehículo es subvirante (understeer), neutro o sobrevirante (oversteer) para los rangos lineales considerados.

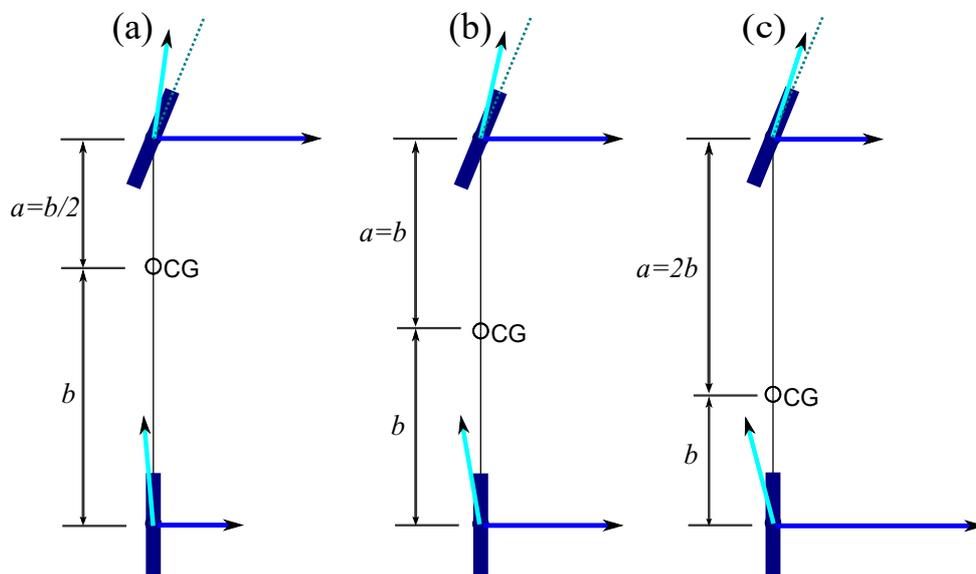


Figura 2: (a) Caso subvirante: $a = \frac{b}{2}$ y $\alpha_F > \alpha_R$; (b) Neutro: $a = b$ y $\alpha_F = \alpha_R$; (c) Sobrevirante: $a = 2b$ y $\alpha_F < \alpha_R$.

La Figura 2 es una adaptación del análisis que hace Milliken and Milliken (1995), en donde se superponen los vectores de fuerza (en azul) y las velocidades (en ciano) para 3 casos de posicionamiento del centro de gravedad (CG). Las fuerzas tendrán diferentes magnitudes según la repartición de peso dada por la posición del CG. Las velocidades tendrán diferentes ángulos de

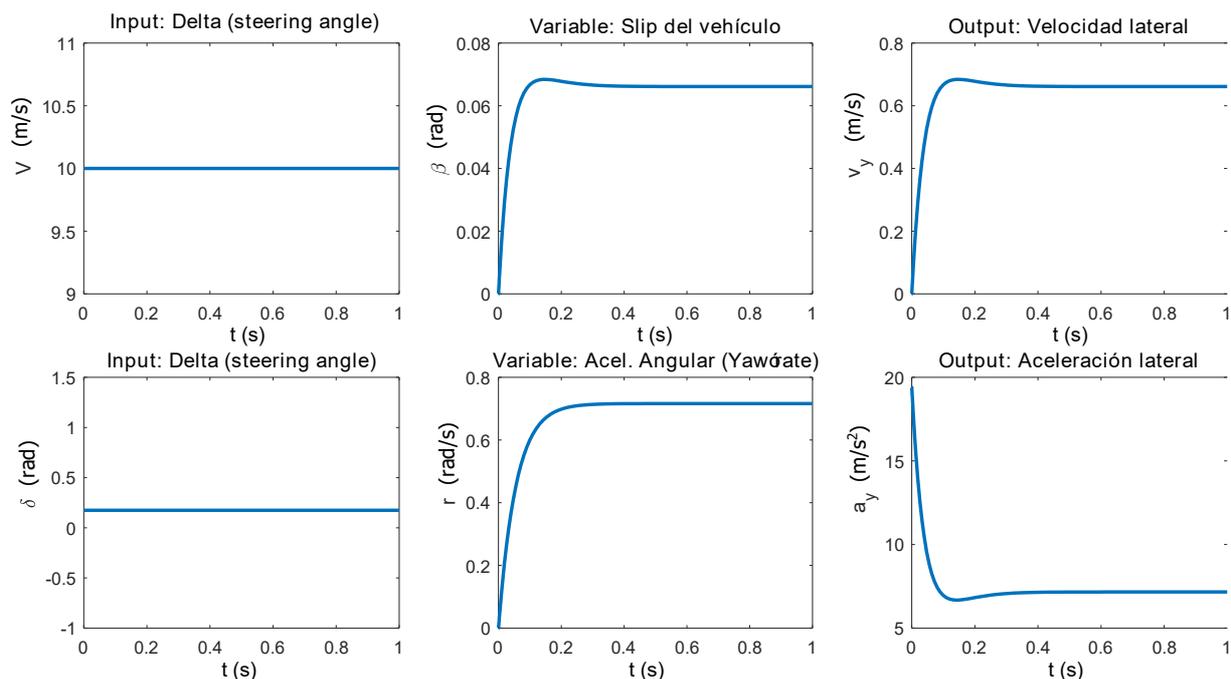


Figura 3: Ejemplo de referencia para las primeras simulaciones numéricas del modelo de bicicleta.

deriva (slip) con respecto al plano longitudinal del vehículo, dictadas por las leyes de congruencia y constitutivas del neumático. Prolongando normales a las velocidades, se pueden obtener los centros instantáneos de rotación (CIRs) para cada caso, en todas las figuras están a la derecha pero en el neutro, el CIR está alineado con el CG, en el subvirante está por debajo y en el sobrevirante está por arriba. Proveyendo al alumno un algoritmo de base, se le solicitan diversas ejercitaciones. Un primer ejercicio es reproducir el análisis de [Milliken and Milliken \(1995\)](#) y analizar los estados que resultan de cambiar la posición del CG, como muestra la Figura 3.

En segundo lugar, se propone que el alumno produzca mediante simulación distintas maniobras con funciones analíticas para $\delta(t)$ en forma de escalón (referencia en Figura 3), trapecio y seno.

En tercer lugar, el alumno toma una porción de telemetría real de un vehículo en curva para alimentar el modelo con $V(t)$ y $\delta(t)$ y calcular expresiones de estabilidad; ver Figura 4. Además, analiza los resultados de agregar el efecto aerodinámico con cierto posicionamiento de centro de presión e incursiona con modelos no lineales de neumáticos ([Pacejka, 2012](#)). Es decir, considera que las fuerzas de la Ecuación (8) tienen en cada rueda una dependencia con la carga vertical correspondiente F_{zi} con $i \in \{F, R\}$, por ejemplo $F_{yF}(\alpha_F, F_{zF})$ y $F_{yR}(\alpha_R, F_{zR})$. Las cargas verticales pueden tener expresiones simples, por ejemplo, definidas según un factor de distribución de peso w_d como $F_{wF} = Ww_d$ y $F_{wR} = W(1 - w_d)$, donde W es el peso del vehículo, y se les suma una carga aerodinámica vertical distribuida según la posición del centro de presión f_p como $F_{aF} = (1/2)\rho C_L f_p AV^2$ y $F_{aR} = (1/2)\rho C_L (1 - f_p) AV^2$, donde ρ es la densidad del aire, C_L el coeficiente de sustentación, A es el área transversal del vehículo y V la velocidad. Empleando datos de la telemetría, los alumnos pueden implementar diversos criterios de estabilidad e indicadores de performance calculados en cada estado.

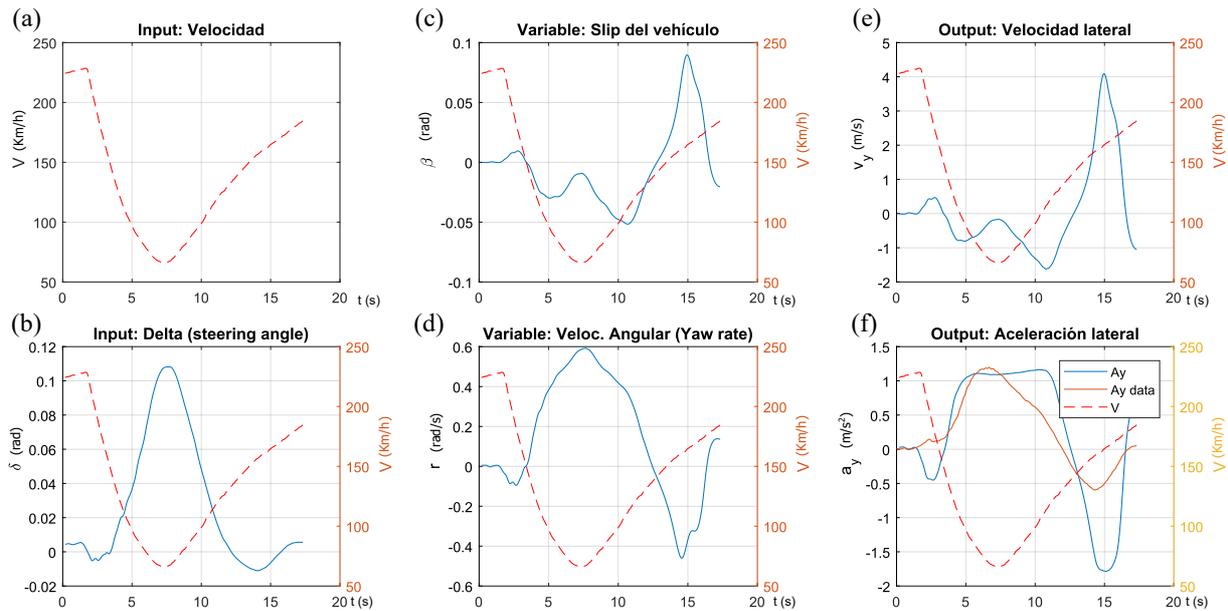


Figura 4: Simulación con telemetría de velocidad V y ángulo de dirección δ . La velocidad V se agrega con ordenada lateral derecha en todas las gráficas. En (f), la aceleración lateral A_y se puede comparar con real A_y data.

5. CONCLUSIONES

El modelo de bicicleta es una representación simplificada para el estudio del manejo y la estabilidad de los vehículos. A pesar de su simplicidad, captura las características esenciales del movimiento de un vehículo, lo que lo convierte en una herramienta valiosa para investigadores e ingenieros. La formulación que se presentó en este trabajo permite asemejarla a un sistema masa-resorte-amortiguador y analizar las condiciones para que se cumpla la estabilidad. En curva, permite conocer si un vehículo es subvirante, neutro o sobrevirante. A los fines educativos de posgrado, su bajo número de ecuaciones permite simular con rapidez y comprender los principios de la dinámica de los vehículos, experimentar con telemetrías reales en las entradas de velocidad y ángulo de dirección, emplear modelos no lineales de neumáticos y efectos aerodinámicos, así como desarrollar una base sólida antes de pasar a modelos más complejos.

REFERENCIAS

- Gillespie, T. D. *Fundamentals of vehicle dynamics*. SAE International, USA, 2021. <http://doi.org/10.4271/9781468601770>. Rev. Ed. by: S. Taheri, C. Sandu, and B.L. Duprey.
- Guiggiani, M. *The Science of Vehicle Dynamics: Handling, Braking, and Ride of Road and Race Cars*. Springer, Dordrecht, 2014. <http://doi.org/10.1007/978-94-017-8533-4>.
- Lukowsky, S. A. E. Basic linear theory of handling and stability of automobiles. *P. I. Mech. Eng. D-J. Aut.*, 223(11):1–10, 2009. <http://doi.org/10.1243/09544070JAUTO899>.
- Milliken, W. and Milliken, D. *Race car vehicle dynamics*. SAE Inc., New York, 2 edition, 1995.
- Pacejka, H. *Tyre and Vehicle Dynamics*. Butterworth-Heinemann, New York, 3 edition, 2012.
- Pucheta, M. A., Risso, J. M., Cardona, A., and Ciabattari, J. Efficient simulation of a sports car in steady-state cornering. In *The 4th Joint International Conference on Multibody System Dynamics IMSD 2016*, pages 1–14. McGill University, Montréal, Canada, 2016.
- Pütz, R. and Serné, T. *Race Car Handling Optimization: Magic Numbers to Better Understand a Race Car*. Springer, Wiesbaden, 2022. <http://doi.org/10.1007/978-3-658-35200-4>.