Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XLI, pp. 643-651
C.I. Pairetti, M.A. Pucheta, M.A. Storti, C.M. Venier (Eds.)
M. Cruchaga, G. Ríos Rodríguez, E. López (Issue eds.)
Rosario, November 5-8, 2024

# UN ARREGLO DE COSECHADORES DE ENERGÍA BASADO EN FLUTTER: ESQUEMA DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

## A FLUTTER-BASED ENERGY HARVESTER DEVICE: TIME-DOMAIN NUMERICAL INTEGRATION SCHEME

**Agostina C. Aichino[a,b], Martín E. Pérez Segura[a,b], Emmanuel Beltramo[a,b], Santiago Ribero[b], Marcelo F. Valdez[c,d] y Sergio Preidikman[a,b]**

[a]*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina.*

[b]*Departamento de Estructuras. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina.*

[c] *Instituto de Investigaciones en Energía No Convencional (INENCO, UNSa – CONICET)*

**Palabras clave:** cosechadores de energía, *flutter*, esquema de integración.

**Resumen.** Este artículo constituye la segunda parte de una serie de dos documentos que presentan el desarrollo e integración numérica, en el dominio del tiempo, de las ecuaciones de movimiento para un arreglo de cosechadores de energía basados en inestabilidades aeroelásticas. El principal desafío de este enfoque es la interdependencia entre las cargas aerodinámicas y el movimiento de los cosechadores. Para abordar esta complicación, se presenta el desarrollo de un esquema iterativo que considera esta interacción. El esquema se basa en un conjunto de adaptaciones e innovaciones del conocido método predictor-corrector de cuarto orden de Hamming que, para problemas como el atacado en este esfuerzo, resulta más apropiado que los métodos de tipo Runge-Kutta.

**Keywords:** energy havesters, flutter, integration scheme.

**Abstract.** This article is the second part of a two-part series aimed at the numerical development and time-domain integration of the equations of motion for an array of energy harvesters based on aeroelastic instabilities. A fundamental challenge with the chosen time-domain approach to solving the aeroelastic problem is the interdependence between the aerodynamic loads and the movement of the harvesters. To address this challenge, an iterative scheme that accounts for this interaction is presented. The scheme is based on a set of adaptations and innovations to the well-known fourth-order Hamming predictor-corrector method, which proves more suitable than Runge-Kutta methods for problems of this nature.


ISSN: 2591-3522 DOI: 10.70567/mc.v41i13.64

## 1. INTRODUCCIÓN

El fenómeno de *flutter* ha sido ampliamente estudiado por ingenieros e investigadores debido a que se trata de una inestabilidad de origen aeroelástico que conduce a fallas catastróficas. Aunque se han llevado a cabo numerosos esfuerzos para evitar su ocurrencia, recientemente se ha comenzado a explorar un enfoque diferente: aprovechar el *flutter* como fuente de generación de energía en sistemas de pequeña escala (Erturk et al., 2010; Bryant y Garcia, 2011; Abdelkefi et al., 2012).

En la primera parte de este trabajo, se presentó el desarrollo de las ecuaciones de movimiento para múltiples cosechadores aeroelásticos dispuestos en arreglos espaciales. Con el fin de estudiar movimientos inestacionarios, así como también explorar fenómenos no-lineales, resulta imprescindible llevar a cabo simulaciones en el dominio del tiempo.

La idea principal consiste en tratar el flujo de aire y los cosechadores como elementos de un único sistema dinámico; e integrar numérica, simultánea, e interactivamente en el dominio del tiempo todas las ecuaciones gobernantes. Sin embargo, existe una complicación fundamental con el enfoque en el dominio del tiempo elegido para resolver el problema aeroelástico: para predecir las cargas aerodinámicas se deben conocer la posición, la velocidad y la aceleración de la estructura (efecto de masa agregada), y para calcular estos parámetros, se deben conocer las cargas aerodinámicas (Preidikman, 1998).

Para superar esta complicación, en esta segunda parte se presenta el desarrollo de un esquema iterativo, que tiene en cuenta la interacción entre las cargas aerodinámicas y el movimiento de los cosechadores. El esquema se basa en un conjunto de adaptaciones e innovaciones del conocido método predictor-corrector de cuarto orden de Hamming (Carnahan et al., 1969).

El método de Hamming ha sido previamente modificado para estudiar problemas bidimensionales ($2D$) de cosecha de energía basada en inestabilidades aeroelásticas (Abdelkefi et al., 2014; Beltramo et al., 2020; Roccia et al., 2020). En este trabajo, se introducen adaptaciones del método de Hamming que permiten integrar las ecuaciones de gobierno de un arreglo de cosechadores, dispuestos en arreglos espaciales, sometidos a desplazamientos de cuerpo rígido y a grandes rotaciones (problema tridimensional, con modos primarios y secundarios acoplados).

Este esquema fue elegido por las siguientes razones: es de cuarto orden; es incondicionalmente estable; permite evaluar las cargas aerodinámicas en pasos de tiempo integrales; y permite, sin desestabilizarse, considerar cargas en el lado derecho de las ecuaciones de movimiento que dependan de la aceleración del sistema dinámico. En los problemas estudiados, uno de los desafíos principales es el cálculo de las cargas aerodinámicas, ya que este proceso es el más costoso desde el punto de vista computacional. Los métodos de integración de tipo Runge-Kutta requieren que las cargas aerodinámicas sean evaluadas en fracciones del paso de tiempo. Sin embargo, los métodos predictor-corrector que permiten evaluar las cargas aerodinámicas en pasos de tiempo integrales representan una potencial ventaja. Por este motivo, el método de Hamming, con algunas adaptaciones adicionales, resulta ideal para atacar problemas de interacción fuerte, permitiendo corregir el modelo aerodinámico y el modelo estructural de manera interactiva para poder avanzar en el dominio del tiempo.

El esquema propuesto en este trabajo se divide en dos partes: *i*) una rutina de inicio o de arranque, y *ii)* una rutina general. En la rutina de inicio de calculan las soluciones predichas y corregidas para los primeros tres pasos de tiempo. Mientras que en la rutina general se calculan las soluciones predichas y corregidas a partir del cuarto paso de tiempo de simulación.

Para el primer paso de tiempo, se utilizan como esquemas predictor-corrector el *método de Euler* y el *método de Euler modificado*. Para el segundo paso de tiempo, se usa el *método de* *dos pasos de Adams-Bashforth* como esquema predictor, y el *método de tres pasos de Adams-Moulton* como esquema corrector. Para el tercer paso de tiempo, se usa el *método de tres pasos de Adams-Bashforth* como esquema predictor, y el *método de cuatro pasos de Adams-Moulton* como esquema corrector (Butcher, 2016; Chapra, 2018). A partir del cuarto paso de tiempo, se utiliza el algoritmo de cuarto orden de Hamming.

## 2. ESQUEMA NUMÉRICO

Con el fin de describir el esquema numérico desarrollado para resolver las ecuaciones de movimiento de un arreglo de cosechadores basados en inestabilidades aeroelásticas, las cuales fueron presentadas en la primera parte de este esfuerzo, se introducen los siguientes conjuntos de ecuaciones:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}\,\boldsymbol{\nu}, \tag{1a}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu}, \dot{\boldsymbol{\nu}}, t), \tag{1b}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{M}_{RB}^{-1}\left[\mathbf{L} - \mathbf{C}_{RB}(\boldsymbol{\nu})\,\boldsymbol{\nu}\right]. \tag{1c}$$

La ecuación cinemática (1a) relaciona las velocidades lineal y angular del cuerpo, en términos de sus componentes en el sistema fijo al cuerpo, $\boldsymbol{\nu}$, con las velocidades lineal y angular del cuerpo, en términos de sus componentes en el sistema inercial, $\dot{\boldsymbol{\eta}}$, a través de la matriz de transformación $\mathbf{J}$. La relación (1b) provee las componentes de las fuerzas y de los momentos, las cuales se incluyen en el vector de cargas $\mathbf{L}$. Y, finalmente, la ec. (1c) es la relación dinámica, donde $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ contiene las aceleraciones lineales y angulares del cuerpo, en términos de sus componentes en el sistema fijo al cuerpo; $\mathbf{M}_{RB}$ es la matriz de inercia; y $\mathbf{C}_{RB}$ es una matriz que contiene los términos centrípetos y de Coriolis.

### 2.1. Condiciones Iniciales

Para comenzar con la solución, se necesitan dos conjuntos de condiciones iniciales: $\boldsymbol{\eta}(0)$ y $\dot{\boldsymbol{\eta}}(0)$. En el caso de que el vector de cargas sea función de la aceleración $\dot{\boldsymbol{\nu}}$, se necesitará un tercer conjunto de condiciones iniciales, $\dot{\boldsymbol{\nu}}(0)$.

En primera instancia, se determina $\boldsymbol{\nu}(0)$ como

$$\boldsymbol{\nu}(0) = \mathbf{J}^{-1}\left[\boldsymbol{\Xi}(0)\right]\dot{\boldsymbol{\nu}}(0). \tag{2}$$

Luego, se determina el vector de cargas inicial:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}\left[\boldsymbol{\eta}(0), \boldsymbol{\nu}(0), \dot{\boldsymbol{\nu}}(0), t = 0\right]. \tag{3}$$

### 2.2. Rutina de Inicio

La rutina de arranque sigue de cerca los principios del esquema general, empleando métodos predictores-correctores para iterar la solución en los primeros tres pasos de tiempo.

#### 2.2.1. Primer paso de tiempo $(t = \Delta t = t_1)$:

**Esquema Predictor:** ***método de Euler***

La solución predicha (primera iteración) se calcula como:

$$^{1}\boldsymbol{\nu}(t_1) = \boldsymbol{\nu}(0) + \dot{\boldsymbol{\nu}}(0)\Delta t \tag{4a}$$

$$^{1}\boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{\eta}(0) + \dot{\boldsymbol{\eta}}(0)\Delta t \tag{4b}$$

$$^{1}\mathbf{L}(t_1) = \mathbf{L}\left[^{1}\boldsymbol{\eta}(t_1),\, ^{1}\boldsymbol{\nu}(t_1),\, \dot{\boldsymbol{\nu}}(0),\, t_1\right] \tag{4c}$$

$$^{1}\mathbf{C}_{RB}(t_1) = \mathbf{C}_{RB}\left[^{1}\boldsymbol{\nu}(t_1)\right] \tag{4d}$$

$$^{1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1) = \mathbf{M}_{RB}^{-1}\left[^{1}\mathbf{L}(t_1) - {}^{1}\mathbf{C}_{RB}(t_1)\,^{1}\boldsymbol{\nu}(t_1)\right] \tag{4e}$$

**Esquema Corrector:** ***método de Euler modificado***

La solución corregida se determina como:

$$^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_1) = \boldsymbol{\nu}(0) + \left[\dot{\boldsymbol{\nu}}(0) +^{k} \dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1)\right]\frac{\Delta t}{2} \tag{5a}$$

$$^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_1) = \mathbf{J}\left[^{k}\boldsymbol{\Xi}\right]\,^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_1) \tag{5b}$$

$$^{k+1}\boldsymbol{\eta}(t_1) = \boldsymbol{\eta}(0) + \left[\dot{\boldsymbol{\eta}}(0) + {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_1)\right]\frac{\Delta t}{2} \tag{5c}$$

$$^{k+1}\mathbf{L}(t_1) = \mathbf{L}\left[^{k+1}\boldsymbol{\eta}(t_1),\, ^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_1),\, ^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1),\, t_1\right] \tag{5d}$$

$$^{k+1}\mathbf{C}_{RB}(t_1) = \mathbf{C}_{RB}\left[^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_1)\right] \tag{5e}$$

$$^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1) = \mathbf{M}_{RB}^{-1}\left[^{k+1}\mathbf{L}(t_1) - {}^{k+1}\mathbf{C}_{RB}(t_1)\,^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_1)\right] \tag{5f}$$

donde $k \geq 1$ es el número de iteración.

Seguidamente, se verifica la convergencia de la solución:

$$e = \left\| \begin{Bmatrix} ^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1) \\ ^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_1) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1) \\ ^{k}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_1) \end{Bmatrix} \right\|_{\infty} \tag{6}$$

Si $e > \epsilon$ (donde $\epsilon$ es una tolerancia establecida para el error en la solución calculada), entonces:

$$^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1) = {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1) \tag{7}$$

y se vuelve a las ecuaciones (5).

Si $e < \epsilon$, entonces:

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1) = {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1) \tag{8a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_1) = {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_1) \tag{8b}$$

$$\boldsymbol{\nu}(t_1) = {}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_1) \tag{8c}$$

$$\boldsymbol{\eta}(t_1) = {}^{k+1}\boldsymbol{\eta}(t_1) \tag{8d}$$

y comienzan los cálculos de la solución en $t = 2\Delta t = t_2$.

### 2.2.2. Segundo paso de tiempo ($t = 2\Delta t = t_2$):

**Esquema Predictor:** ***método de dos pasos de Adams-Bashforth***

La solución predicha (primera iteración) se obtiene como:

$$^{1}\boldsymbol{\nu}(t_2) = \boldsymbol{\nu}(t_1) + [3\,\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1) - \dot{\boldsymbol{\nu}}(0)]\,\frac{\Delta t}{2} \tag{9a}$$

$$^{1}\boldsymbol{\eta}(t_2) = \boldsymbol{\eta}(t_1) + [3\,\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_1) - \dot{\boldsymbol{\eta}}(0)]\,\frac{\Delta t}{2} \tag{9b}$$

$$^{1}\mathbf{L}(t_2) = \mathbf{L}\left[{}^{1}\boldsymbol{\eta}(t_2), {}^{1}\boldsymbol{\nu}(t_2), \dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1), t_2\right] \tag{9c}$$

$$^{1}\mathbf{C}_{RB}(t_2) = \mathbf{C}_{RB}\left[{}^{1}\boldsymbol{\nu}(t_2)\right] \tag{9d}$$

$$^{1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_2) = \mathbf{M}_{RB}^{-1}\left[{}^{1}\mathbf{L}(t_2) - {}^{1}\mathbf{C}_{RB}(t_2){}^{1}\boldsymbol{\nu}(t_2)\right] \tag{9e}$$

**Esquema Corrector:** ***método de tres pasos de Adams-Moulton***

La solución corregida se calcula como sigue:

$$^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_2) = \boldsymbol{\nu}(t_1) + \left[5\,{}^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_2) + 8\,\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1) - \dot{\boldsymbol{\nu}}(0)\right]\frac{\Delta t}{12} \tag{10a}$$

$$^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_2) = \mathbf{J}\left[{}^{k}\boldsymbol{\Xi}(t_2)\right]{}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_2) \tag{10b}$$

$$^{k+1}\boldsymbol{\eta}(t_2) = \boldsymbol{\eta}(t_1) + \frac{1}{2}\left[5\,{}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_2) + 8\,\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_1) - \dot{\boldsymbol{\eta}}(0)\right]\frac{\Delta t}{12} \tag{10c}$$

$$^{k+1}\mathbf{L}(t_2) = \mathbf{L}\left[{}^{k+1}\boldsymbol{\eta}(t_2), {}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_2), {}^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_2), t_2\right] \tag{10d}$$

$$^{k+1}\mathbf{C}_{RB}(t_2) = \mathbf{C}_{RB}\left[{}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_2)\right] \tag{10e}$$

$$^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_2) = \mathbf{M}_{RB}^{-1}\left[{}^{k+1}\mathbf{L}(t_2) - {}^{k+1}\mathbf{C}_{RB}(t_2){}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_2)\right] \tag{10f}$$

Luego, se verifica la convergencia de la solución:

$$e = \left\| \begin{Bmatrix} {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_2) \\ {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_2) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_2) \\ {}^{k}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_2) \end{Bmatrix} \right\|_{\infty} \tag{11}$$

Si $e > \epsilon$, entonces:

$$^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_2) = {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_2) \tag{12}$$

y se vuelve a las ecuaciones (10).

Si $e < \epsilon$, entonces:

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_2) = {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_2) \tag{13a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_2) = {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_2) \tag{13b}$$

$$\boldsymbol{\nu}(t_2) = {}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_2) \tag{13c}$$

$$\boldsymbol{\eta}(t_2) = {}^{k+1}\boldsymbol{\eta}(t_2) \tag{13d}$$

y comienzan los cálculos de la solución en $t = 3\Delta t = t_3$.

#### 2.2.3. Tercer paso de tiempo $(t = 3\Delta t = t_3)$:

**Esquema Predictor:** ***método de tres pasos de Adams-Bashforth***

La solución predicha (primera iteración) se calcula como:

$${}^{1}\boldsymbol{\nu}(t_3) = \boldsymbol{\nu}(t_2) + [23\,\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_2) - 16\,\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1) + 5\,\dot{\boldsymbol{\nu}}(0)]\,\frac{\Delta t}{12} \tag{14a}$$

$${}^{1}\boldsymbol{\eta}(t_3) = \boldsymbol{\eta}(t_2) + [23\,\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_2) - 16\,\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_1) + 5\,\dot{\boldsymbol{\eta}}(0)]\,\frac{\Delta t}{12} \tag{14b}$$

$${}^{1}\mathbf{L}(t_3) = \mathbf{L}\left[{}^{1}\boldsymbol{\eta}(t_3), {}^{1}\boldsymbol{\nu}(t_3), {}^{1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_2), t_3\right] \tag{14c}$$

$${}^{1}\mathbf{C}_{RB}(t_3) = \mathbf{C}_{RB}\left[{}^{1}\boldsymbol{\nu}(t_3)\right] \tag{14d}$$

$${}^{1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_3) = \mathbf{M}_{RB}^{-1}\left[{}^{1}\mathbf{L}(t_3) - {}^{1}\mathbf{C}_{RB}(t_3){}^{1}\boldsymbol{\nu}(t_3)\right] \tag{14e}$$

**Esquema Corrector:** ***método de cuatro pasos de Adams-Moulton***

La solución corregida se obtiene como:

$${}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_3) = \boldsymbol{\nu}(t_2) + \left[9\,{}^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_3) + 19\,\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_2) - 5\,\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_1) + \dot{\boldsymbol{\nu}}(0)\right]\frac{\Delta t}{24} \tag{15a}$$

$${}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_3) = \mathbf{J}\left[{}^{k}\boldsymbol{\Xi}(t_3)\right]{}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_3) \tag{15b}$$

$${}^{k+1}\boldsymbol{\eta}(t_3) = \boldsymbol{\eta}(t_2) + \left[9\,{}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_3) + 19\,\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_2) - 5\,\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_1) + \dot{\boldsymbol{\eta}}(0)\right]\frac{\Delta t}{24} \tag{15c}$$

$${}^{k+1}\mathbf{L}(t_3) = \mathbf{L}\left[{}^{k+1}\boldsymbol{\eta}(t_3), {}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_3), {}^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_3), t_3\right] \tag{15d}$$

$${}^{k+1}\mathbf{C}_{RB}(t_3) = \mathbf{C}_{RB}\left[{}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_3)\right] \tag{15e}$$

$${}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_3) = \mathbf{M}_{RB}^{-1}\left[{}^{k+1}\mathbf{L}(t_3) - {}^{k+1}\mathbf{C}_{RB}(t_3)\,{}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_3)\right] \tag{15f}$$

Luego, se verifica la convergencia de la solución:

$$e = \left\| \begin{Bmatrix} {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_3) \\ {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_3) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_3) \\ {}^{k}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_3) \end{Bmatrix} \right\|_{\infty} \tag{16}$$

Si $e > \epsilon$, entonces:

$${}^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_3) = {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_3) \tag{17}$$

y se vuelve a las ecuaciones (15).

Si $e < \epsilon$, entonces:

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_3) = {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_3) \tag{18a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_3) = {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_3) \tag{18b}$$

$$\boldsymbol{\nu}(t_3) = {}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_3) \tag{18c}$$

$$\boldsymbol{\eta}(t_3) = {}^{k+1}\boldsymbol{\eta}(t_3) \tag{18d}$$

y comienzan los cálculos de la solución en $t = n\Delta t = t_n$ para $n > 3$.

### 2.3. Rutina General

A partir del cuarto paso de tiempo ($t = n\Delta t = t_n$ para $n > 3$), la solución se obtiene mediante el esquema general. Éste se describe a continuación.

#### Esquema Predictor

La solución predicha se obtiene a partir del *algoritmo predictor de cuarto orden de Hamming*:

$${}^{p}\boldsymbol{\nu}(t_n) = \boldsymbol{\nu}(t_{n-4}) + \left[2\,\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_{n-1}) - \dot{\boldsymbol{\nu}}(t_{n-2}) + 2\,\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_{n-3})\right]\frac{4\Delta t}{3} \tag{19a}$$

$${}^{p}\boldsymbol{\eta}(t_n) = \boldsymbol{\eta}(t_{n-4}) + \left[2\,\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_{n-1}) - \dot{\boldsymbol{\eta}}(t_{n-2}) + 2\,\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_{n-3})\right]\frac{4\Delta t}{3} \tag{19b}$$

$${}^{p}\mathbf{L}(t_n) = \mathbf{L}\left[{}^{p}\boldsymbol{\eta}(t_n), {}^{p}\boldsymbol{\nu}(t_n), \dot{\boldsymbol{\nu}}(t_{n-1}), t_n\right] \tag{19c}$$

$${}^{p}\mathbf{C}_{RB}(t_n) = \mathbf{C}_{RB}\left[{}^{p}\boldsymbol{\nu}(t_n)\right] \tag{19d}$$

$${}^{p}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_n) = \mathbf{M}_{RB}^{-1}\left[{}^{p}\mathbf{L}(t_n) - {}^{p}\mathbf{C}_{RB}(t_n)\,{}^{p}\boldsymbol{\nu}(t_n)\right] \tag{19e}$$

#### Modificación de la solución predicha

La solución predicha se modifica mediante los errores de truncamiento, $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\nu}}(t_{n-1})$ y $\mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}}(t_{n-1})$, del paso de tiempo anterior:

$${}^{1}\boldsymbol{\nu}(t_n) = {}^{p}\boldsymbol{\nu}(t_n) + \frac{112}{9}\mathbf{E}_{\boldsymbol{\nu}}(t_{n-1}) \tag{20a}$$

$${}^{1}\boldsymbol{\eta}(t_n) = {}^{p}\boldsymbol{\eta}(t_n) + \frac{112}{9}\mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}}(t_{n-1}) \tag{20b}$$

$${}^{1}\mathbf{L}(t_n) = \mathbf{L}\left[{}^{1}\boldsymbol{\eta}(t_n), {}^{1}\boldsymbol{\nu}(t_n), {}^{p}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_n), t_n\right] \tag{20c}$$

$${}^{1}\mathbf{C}_{RB}(t_n) = \mathbf{C}_{RB}\left[{}^{1}\boldsymbol{\nu}(t_n)\right] \tag{20d}$$

$${}^{1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_n) = \mathbf{M}_{RB}^{-1}\left[{}^{1}\mathbf{L}(t_n) - {}^{1}\mathbf{C}_{RB}(t_n)\,{}^{1}\boldsymbol{\nu}(t_n)\right] \tag{20e}$$

**Esquema Corrector**

La solución predicha-modificada se corrige según el *algoritmo corrector de cuarto orden de Hamming*:

$$ {}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_n) = \frac{1}{8}\left\{9\,\boldsymbol{\nu}(t_{n-1}) - \boldsymbol{\nu}(t_{n-3}) + 3\,\left[{}^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_n) + 2\,\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_{n-1}) - 3\,\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_{n-2})\right]\Delta t\right\} \tag{21a} $$

$$ {}^{k+1}\boldsymbol{\eta}(t_n) = \frac{1}{8}\left\{9\,\boldsymbol{\eta}(t_{n-1}) - \boldsymbol{\eta}(t_{n-3}) + 3\,\left[{}^{k}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_n) + 2\,\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_{n-1}) - 3\,\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_{n-2})\right]\Delta t\right\} \tag{21b} $$

$$ {}^{k+1}\mathbf{L}(t_n) = \mathbf{L}\left[{}^{k+1}\boldsymbol{\eta}(t_n), {}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_n), {}^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_n), t_n\right] \tag{21c} $$

$$ {}^{k+1}\mathbf{C}_{RB}(t_n) = \mathbf{C}_{RB}\left[{}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_n)\right] \tag{21d} $$

$$ {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_n) = \mathbf{M}_{RB}^{-1}\left[{}^{k+1}\mathbf{L}(t_n) - {}^{k+1}\mathbf{C}_{RB}(t_n){}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_n)\right] \tag{21e} $$

Se verifica la convergencia:

$$ e = \left\| \begin{Bmatrix} {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_n) \\ {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_n) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_n) \\ {}^{k}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_n) \end{Bmatrix} \right\|_{\infty} \tag{22} $$

Si $e > \epsilon$, entonces:

$$ {}^{k}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_n) = {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_n) \quad \text{y} \quad {}^{k}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_n) = {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t_n) \tag{23} $$

y se vuelve a las ecuaciones (21).

Si $e < \epsilon$, se estiman los errores de truncamiento

$$ \mathbf{E}_{\boldsymbol{\nu}}(t_n) = \frac{9}{121}\left[{}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_n) - {}^{p}\boldsymbol{\nu}(t_n)\right] \tag{24a} $$

$$ \mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}}(t_n) = \frac{9}{121}\left[{}^{k+1}\boldsymbol{\eta}(t_n) - {}^{p}\boldsymbol{\eta}(t_n)\right] \tag{24b} $$

y la **solución final** está dada por:

$$ \boldsymbol{\nu}(t_n) = {}^{k+1}\boldsymbol{\nu}(t_n) - \mathbf{E}_{\boldsymbol{\nu}}(t_n) \tag{25a} $$

$$ \boldsymbol{\eta}(t_n) = {}^{k+1}\boldsymbol{\eta}(t_n) - \mathbf{E}_{\boldsymbol{\eta}}(t_n) \tag{25b} $$

$$ \mathbf{L}(t_n) = \mathbf{L}\left[\boldsymbol{\eta}(t_n), \boldsymbol{\nu}(t_n), {}^{k+1}\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_n), t_n\right] \tag{25c} $$

$$ \mathbf{C}_{RB}(t_n) = \mathbf{C}_{RB}\left[\boldsymbol{\nu}(t_n)\right] \tag{25d} $$

$$ \dot{\boldsymbol{\nu}}(t_n) = \mathbf{M}_{RB}^{-1}\left[\mathbf{L}(t_n) - \mathbf{C}_{RB}(t_n)\boldsymbol{\nu}(t_n)\right] \tag{25e} $$

$$ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t_n) = \mathbf{J}\left[\boldsymbol{\Xi}(t_n)\right]\dot{\boldsymbol{\nu}}(t_n) \tag{25f} $$

A continuación, las soluciones conocidas se cambian un lugar:

$$ \dot{\boldsymbol{\nu}}(t_{n-i-1}) = \dot{\boldsymbol{\nu}}(t_{n-i}) \tag{26a} $$

$$ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t_{n-i-1}) = \dot{\boldsymbol{\eta}}(t_{n-i}) \tag{26b} $$

$$ \boldsymbol{\nu}(t_{n-i-1}) = \boldsymbol{\nu}(t_{n-i}) \tag{26c} $$

$$ \boldsymbol{\eta}(t_{n-i-1}) = \boldsymbol{\eta}(t_{n-i}) \tag{26d} $$

para $i = 3, 2, 1, 0$ y comienza la solución para el próximo paso de tiempo (ecuaciones (19)).

## 3. CONCLUSIONES

Este trabajo tuvo como motivación el desarrollo de un esquema numérico para la integración simultánea e interactiva, en el dominio del tiempo, de las ecuaciones de movimiento de un arreglo de cosechadores de energía basados en inestabilidades aeroelásticas. El esquema propuesto se basa en el método predictor-corrector de cuarto orden de Hamming y se divide en dos partes: *i)* una rutina de arranque, y *ii)* la rutina general.

La rutina de arranque sigue de cerca los principios del esquema general, empleando métodos predictores-correctores para iterar la solución en los primeros tres pasos de tiempo. Para el primer paso de tiempo, se utilizó como esquema predictor el método de Euler, y como esquema corrector el método de Euler modificado. Para el segundo paso de tiempo, se usó el método de dos pasos de Adams-Bashforth como esquema predictor, y el método de tres pasos de Adams-Moulton como esquema corrector. Y, para el tercer paso de tiempo, se empleó el método de tres pasos de Adams-Bashforth como esquema predictor, y el método de cuatro pasos de Adams-Moulton como esquema corrector.

La rutina general se emplea para determinar la solución a partir del cuarto paso de tiempo. Para obtener la solución predicha, se utilizó el algoritmo predictor de cuarto orden de Hamming. Luego, la solución predicha se modificó mediante errores de truncamiento del paso de tiempo anterior. Y, finalmente, la solución predicha-modificada se corrigió empleando el algoritmo corrector de cuarto orden de Hamming.

## REFERENCIAS

Abdelkefi A., Ghommem M., Nuhait A., y Hajj M. Nonlinear analysis and enhancement of wing-based piezoaeroelastic energy harvesters. *Journal of Sound and Vibration*, 333(1):166–177, 2014. ISSN 0022-460X. doi:https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.08.032.

Abdelkefi A., Nayfeh A., y Hajj M. Design of piezoaeroelastic energy harvesters. *Nonlinear Dynamics*, 68:519–530, 2012.

Beltramo E., Pérez Segura M., Roccia B., Valdez M., Verstraete M., y Preidikman S. Constructive aerodynamic interference in a network of weakly coupled flutter-based energy harvesters. *Aerospace*, 7(12), 2020. ISSN 2226-4310. doi:10.3390/aerospace7120167.

Bryant M. y Garcia E. Modeling and Testing of a Novel Aeroelastic Flutter Energy Harvester. *Journal of Vibration and Acoustics*, 133(1):011010, 2011. ISSN 1048-9002. doi:10.1115/1.4002788.

Butcher J. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley, tercera edición, 2016.

Carnahan B., Luther H., y Wilkes J. *Applied Numerical Methods*. Wiley, primera edición, 1969.

Chapra S. *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*. McGraw-Hill Education, cuarta edición, 2018.

Erturk A., Vieira W.G.R., De Marqui C. J., y Inman D.J. On the energy harvesting potential of piezoaeroelastic systems. *Applied Physics Letters*, 96(18):184103, 2010. ISSN 0003-6951. doi:10.1063/1.3427405.

Preidikman S. *Numerical Simulations of Interactions Among Aerodynamics, Structural Dynamics, and Control Systems*. Tesis de Doctorado, Virginia Tech, 1998.

Roccia B., Verstraete M., Ceballos L., Balachandran B., y Preidikman S. Computational study on aerodynamically coupled piezoelectric harvesters. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 31(13):1578–1593, 2020. doi:10.1177/1045389X20930093.