

## CARACTERIZACIÓN Y MODELIZACIÓN DE UN SISTEMA EXPERIMENTAL DE PÉNDULO PARAMÉTRICO CON MIRAS A LA APLICACIÓN DE ESTRATEGIAS DE CONTROL

### CHARACTERISATION AND MODELLING OF AN EXPERIMENTAL PARAMETRIC PENDULUM SYSTEM FOR THE APPLICATION OF CONTROL STRATEGIES

**Lucas Oxarango, J. Nicolas Virla, Lisandro M. Rojas y Franco E. Dotti**

*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP). Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina. [gimap@frbb.utn.edu.ar](mailto:gimap@frbb.utn.edu.ar), <http://www.frbb.utn.edu.ar/frbb>. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.*

**Palabras clave:** Dinámica no lineal, sistema experimental, péndulo paramétrico.

**Resumen.** En este artículo se realiza el estudio y caracterización de las respuestas estacionarias de un sistema experimental complejo, formado por un excitador recíprocante y un péndulo de múltiples masas. El modelo propuesto se fundamenta en la interacción entre el sistema excitador y el péndulo considerando la estructura compuesta por múltiples osciladores, analizando el comportamiento del conjunto y la interacción de sus componentes. A su vez, los parámetros característicos del sistema se estiman a partir de la comparación de mediciones experimentales con simulaciones numéricas. El objetivo del trabajo es identificar configuraciones de parámetros que permitan al modelo propuesto asemejarse a las observaciones experimentales obtenidas previamente.

**Keywords:** Nonlinear dynamics, experimental system, parametric pendulum.

**Abstract.** This paper studies and characterizes the stationary responses of a complex experimental system consisting of a reciprocating exciter and a multi-mass pendulum. The proposed model is based on the interaction between the exciter system and the pendulum, taking into account the structure composed of multiple oscillators, as well as analyzing the behavior of the system and the interaction of its components. The characteristic parameters are estimated from the comparison of experimental measurements with numerical simulations. The objective of the work is to identify parameter configurations that allow the proposed model to resemble previously obtained experimental observations.

## 1. INTRODUCCIÓN

El péndulo paramétrico es un ejemplo recurrente en el estudio de sistemas dinámicos no lineales, ya que su comportamiento exhibe respuestas rotatorias, oscilatorias y caóticas (Clifford y Bishop, 1995; Bishop y Clifford, 1996; Garira y Bishop, 2003). Recientemente, se lo ha propuesto como un convertidor de energía undimotriz (Wiercigroch, 2010; Nandakumar et al., 2012; Yurchenko y Alevras, 2013; Dotti y Virla, 2021) debido a la variedad de respuestas dinámicas, posibilidades constructivas y la capacidad de modificar su frecuencia natural para que sintonice con la frecuencia del oleaje. De las posibles respuestas estables y no caóticas del sistema, la rotatoria es la que mayor energía cinética posee (Najdecka et al., 2015; Dotti et al., 2019a). Sin embargo, debido a la naturaleza estocástica del oleaje, deben mantenerse las respuestas mediante una acción de control que permita corregir cualquier cambio en la estabilidad del sistema. En busca de autonomía y eficiencia en los convertidores pendulares, las acciones de control deben ser lo más económicas posibles en términos de consumo energético. Esto se debe a que la energía utilizada en el control debe extraerse de la generada por el convertidor. Por lo tanto, para lograr economía en una acción de control, se requiere modelar de manera precisa el comportamiento del sistema pendular.

Dado que la tecnología de convertidores pendulares no ha sido probada aún en ambiente real, todas las propuestas teóricas de leyes de control de rotaciones se han implementado en laboratorio ((Vaziri et al., 2014; de Paula et al., 2012)). En estas implementaciones, se ha empleado casi exclusivamente el modelo clásico del péndulo paramétrico para predecir la respuesta del sistema. No obstante, en investigaciones experimentales previas (Xu et al., 2007; Dotti et al., 2023) se reportaron interacciones entre los sistemas excitadores y el sistema pendular que no pueden ser abordadas por el modelo de péndulo paramétrico clásico. Tales interacciones afectan la respuesta del péndulo e influyen negativamente en la eficiencia de un eventual control. En este artículo se presenta un modelo de la dinámica conjunta del péndulo paramétrico y su sistema excitador, que pretende capturar de una forma más precisa la respuesta del péndulo, contemplando las vibraciones espurias mencionadas.

Luego de la introducción, se presentan las observaciones realizadas en la experiencia de laboratorio y las hipótesis consideradas que podrían describir los fenómenos. Seguido a esto, se propone un sistema modificado del conjunto excitador-péndulo y se realizan simulaciones numéricas que son comparadas con ensayos de laboratorio. Por último, se presentan los aspectos más importantes del trabajo.

## 2. PLANTEO DEL PROBLEMA

### 2.1. Descripción del sistema experimental

El sistema excitador consiste en un mecanismo biela manivela, accionado mediante un motor trifásico de inducción que mueve una polea solidaria a la manivela con relación de transmisión variable. Esta a su vez mueve la biela, lo que genera el movimiento recíprocante en la base móvil. La base móvil se encuentra formada por una estructura rígida que se desliza mediante rieles sobre el bastidor fijo del excitador. Sobre ella se monta el sistema pendular y los elementos de medición y control. El sistema pendular montado sobre la base móvil del excitador está formado por un rotor desbalanceado con dos masas solidarias a él. El conjunto excitador-sistema pendular puede apreciarse en la Figura 1.

Con este dispositivo se pueden obtener 15 configuraciones de experimentos, gracias a cinco opciones de frecuencia  $f$  (en Hz) siendo estas 2,361, 1,921, 1,540, 1,193 y 0,832, sumado a las tres posibilidades de longitud de la manivela de radio  $r$  (en metros) siendo 0,205, 0,106 y 0,075.

Los experimentos realizados para este trabajo corresponden a la selección del radio fijo  $r$  de 0,075 y a la frecuencia de excitación 1,193 Hz. Por lo tanto, el forzamiento  $Y(t)$  queda definido mediante la expresión

$$Y(t) = r (1 - \cos(\Omega_f t)) + L \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin^2(\Omega_f t)}{L^2}} \right), \quad (1)$$

dependiendo de  $\Omega_f$  que es la frecuencia angular a la que rota el excitador y  $L$  la biela de 0.535 m.

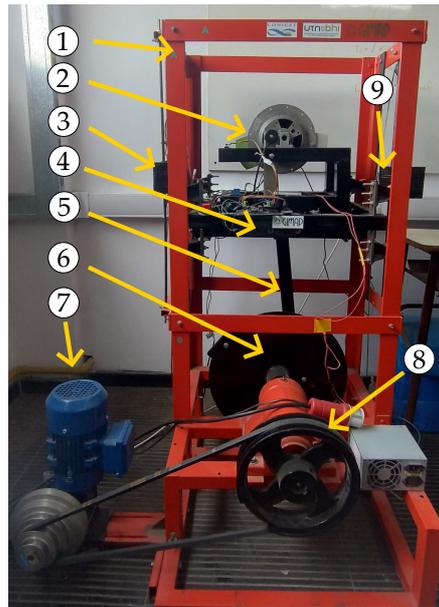


Figura 1: Excitador recíprocante formado por: Estructura fija (1); Sistema pendular (2); Contrapeso izquierdo (3); Base o mesa móvil (4); Biela (5); Manivela (6); Motor trifásico (7); Poleas reductoras (8); Contrapeso derecho (9).

## 2.2. Observaciones de los ensayos experimentales

[Dotti et al. \(2023\)](#) observaron en el sistema experimental oscilaciones que originaban respuestas aparentemente cuasiperiódicas en el sistema. Este escenario puede ocasionar que las respuestas rotatorias deseadas pierdan estabilidad y resulten en respuestas menos energéticas como oscilaciones o reposo. Los investigadores supusieron que estas respuestas podrían estar originadas debido a las características constructivas del sistema, en donde las distintas piezas móviles podrían verse afectadas por el forzamiento impuesto, implicando una interacción entre ellas y ocasionando una variación entre las respuestas experimentales y numéricas.

Estas respuestas inesperadas no podían reproducirse mediante el modelo teórico clásico del péndulo paramétrico ([Clifford y Bishop, 1995](#); [Dotti et al., 2019b](#)), el cual se empleó en el mencionado estudio. Este sistema se encuentra definido por la expresión

$$I_p \ddot{\theta} + c_\theta \dot{\theta} + l_{cm} m_{cm} (g + \ddot{Y}(t)) \sin(\theta) = 0, \quad (2)$$

donde  $I_p$  es la inercia del péndulo,  $c_\theta$  el coeficiente de fricción viscosa,  $m_{cm}$  la masa del sistema pendular,  $l_{cm}$  la distancia del centro de masa al de rotación, además de  $Y(t)$  siendo el forzamiento externo.

En la Figura 2 se puede observar que la respuesta numérica del sistema, obtenida al resolver la ecuación clásica (Ecuación 2), presenta una rotación bien definida. En contraste, la respuesta experimental muestra una nube densa de puntos alrededor de la simulación. Esta diferencia, junto con el hecho de que los puntos de Poincaré abarcan una región elíptica en el espacio de fase, sugiere que las respuestas son cuasiperiódicas.

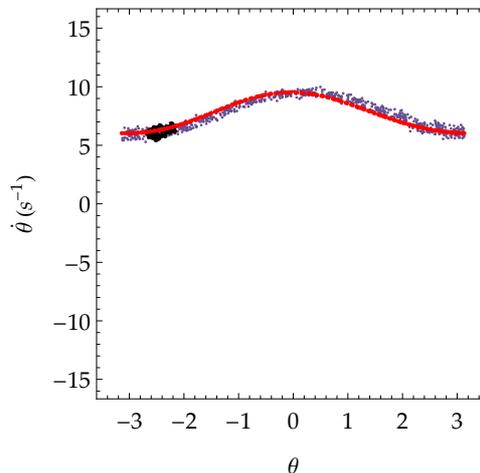


Figura 2: Comparación entre simulación del péndulo paramétrico clásico (rojo) con respuestas experimentales (violeta) y sus puntos de Poincaré (negro).

Se observó que los contrapesos del sistema vibraban lateralmente a medida que la mesa móvil realiza su recorrido por las guías, lo que indicaría un acoplamiento en esta dirección. Sumado a esto, la mesa permite una leve rotación en el plano, por lo que afectaría también las respuestas del péndulo.

Durante los ensayos se observó que la mesa posee una oscilación lateral en el plano donde se mueve el péndulo que el modelo clásico no considera. Midiendo las aceleraciones en esta dirección se observó que la magnitud de las mismas, si bien son menores a la aceleración impuesta por el forzamiento recíprocante, no son despreciables por lo que se supone que estarían afectando la respuesta del péndulo. En la Figura 3 se aprecia el espectro de la oscilación lateral de la mesa móvil, donde aparecen amplitudes de magnitud considerable para armónicos del forzamiento de frecuencia alta, que podrían deberse a una resonancia no identificada.

### 3. MODELO MATEMÁTICO PROPUESTO

Para estudiar el sistema experimental, y predecir el comportamiento del mismo teniendo en cuenta las oscilaciones de la base, se modifica el sistema del péndulo paramétricamente forzado clásico (Clifford y Bishop, 1995). Se considera en primer lugar que la estructura móvil de la base esta compuesta por tres osciladores, dos laterales que funcionan como disipadores de energía, denominados  $X_R$  y  $X_L$ , y uno central  $X_b$  que es donde se monta el sistema pendular, siendo además el que recibe el forzamiento (Figura 4). Los osciladores laterales sirven para sintonizar los máximos desplazamientos de la base  $X_b$  por lo que su comportamiento dinámico se ve afectado por ambos.

Se considera además que el oscilador  $X_b$  se encuentra desalineado con respecto al punto de aplicación del forzamiento, representado por una barra rígida  $d$  considerada sin masa. Por lo tanto, se asume que el sistema puede rotar en el plano  $X_b Y_b$  un ángulo  $\beta$  que representa un giro

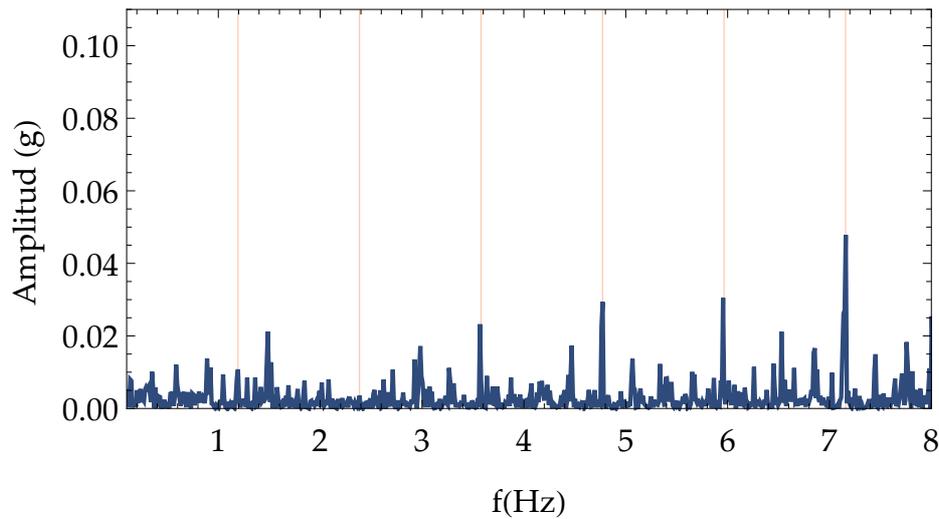


Figura 3: Espectro para la oscilación lateral medida en el excitador (azul), en conjunto con la frecuencia de forzamiento y sus armónicos (naranja).

entre la base  $X_b$  y el muñón de la biela. Esto busca asemejarse a las oscilaciones observadas experimentalmente en esta posición.

Los osciladores  $X_L$  y  $X_R$  se encuentran vinculados al oscilador  $X_b$  mediante resortes de rigideces  $k_{R1}$  y  $k_{L1}$  respectivamente, que permiten representar la oscilación relativa entre la base y los contrapesos del sistema experimental. Los osciladores  $X_R$  y  $X_L$  se vinculan a la estructura del sistema infinitamente rígida sobre la que deslizan mediante una rigidez  $k_{L0}$  y  $k_{R0}$ .

Por último, se asume una rigidez torsional  $k_t$  en la vinculación del muñón de la biela y la base móvil. En la Figura 4 se puede apreciar un esquema del modelo utilizado junto con los parámetros del sistema, los osciladores y las vinculaciones entre sí, además de las coordenadas consideradas para la derivación de las ecuaciones.

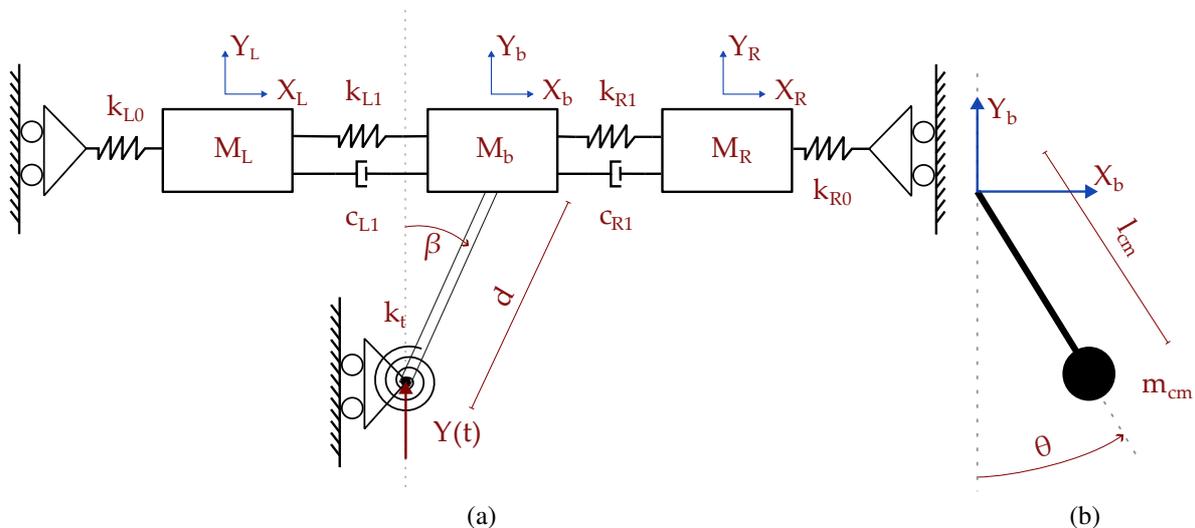


Figura 4: Coordenadas del sistema propuesto. a) Estructura móvil con forzamiento  $Y(t)$  impuesto. b) Péndulo paramétrico clásico montado sobre el oscilador  $X_b$ .

A partir del esquema de la Figura 4, se pueden obtener las ecuaciones del sistema considerando el péndulo montado en  $X_b$ . Las coordenadas generalizadas del sistema quedan expresadas

como

$$\begin{aligned} X_b &= d \operatorname{sen}(\beta), \\ Y_b &= Y(t) + d \operatorname{cos}(\beta), \\ x_p &= X_b + l_{cm} \operatorname{sen}(\theta), \\ y_p &= Y_b - l_{cm} \operatorname{cos}(\theta), \end{aligned} \quad (3)$$

en conjunto con  $X_L$  y  $X_R$ , tomando  $Y_R = Y_L = Y_b$  y siendo  $x_p$  e  $y_p$  las coordenadas del centro de masa del péndulo. Mediante las ecuaciones de Lagrange se derivan las ecuaciones para los grados de libertad del sistema, siendo estas

$$M_L \ddot{X}_L + c_{L1} (\dot{X}_L - d \dot{\beta} \operatorname{cos}(\beta)) + k_{L1} (X_L - d \operatorname{sen}(\beta)) + k_{L0} X_L = 0, \quad (4)$$

$$M_R \ddot{X}_R + c_{R1} (\dot{X}_R - d \dot{\beta} \operatorname{cos}(\beta)) + k_{R1} (X_R - d \operatorname{sen}(\beta)) + k_{R0} X_R = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} d g \operatorname{sen}(\beta) (-M_b - m_{cm} - M_L - M_R) - d (k_{L1} X_L + k_{R1} X_R) \operatorname{cos}(\beta) - d l_{cm} m_{cm} \ddot{\theta} \operatorname{cos}(\beta + \theta) \\ + k_t \dot{\beta}(t) - (c_{L1} \dot{X}_L + c_{R1} \dot{X}_R) d \operatorname{cos}(\beta) - c_b \dot{\beta} + (c_{L1} + c_{R1}) d^2 \dot{\beta} \operatorname{cos}^2(\beta) \\ + \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{cos}(\beta) (d^2 k_{L1} + d^2 k_{R1} + d^2 M_L \dot{\beta}^2 + d^2 M_R \dot{\beta}^2) - d l_{cm} m_{cm} \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}(\beta + \theta) \\ - d (M_b + m_{cm} + M_L + M_R) \ddot{Y} \operatorname{sen}(\beta) + d^2 (M_b + m_{cm} + M_L \operatorname{sen}^2(\beta) + M_R \operatorname{sen}^2(\beta)) \ddot{\beta} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$I_p \ddot{\theta} + c_\theta \dot{\theta} + d l_{cm} m_{cm} \ddot{\beta} \operatorname{cos}(\beta + \theta) - d l_{cm} m_{cm} \dot{\beta}^2 \operatorname{sen}(\beta + \theta) + l_{cm} m_{cm} (g + \ddot{Y}) \operatorname{sen}(\theta) = 0, \quad (7)$$

donde además de los parámetros definidos anteriormente se agrega  $c_b$ , siendo el coeficiente de fricción asociados al contacto entre la carcasa y el muñón de la biela, y también  $c_{R1}$  y  $c_{L1}$  siendo estos los coeficientes de fricción debidos al contacto entre los osciladores  $X_b$  con  $X_R$  y  $X_L$ . Los parámetros  $k_{L0}$ ,  $k_{R0}$ ,  $k_{L1}$ ,  $k_{R1}$  y  $k_t$  son los utilizados para sintonizar el modelo con el experimento. En la Tabla 1 pueden apreciarse los valores de los coeficientes restantes del sistema.

Parámetro [Unidad]	Magnitud	Parámetro [Unidad]	Magnitud
$I_p$ [Kg m <sup>2</sup> ]	0.0273	$d$ [m]	0.28
$m_{cm}$ [Kg]	1.09	$g$ [m/s <sup>2</sup> ]	9.81
$l_{cm}$ [m]	0.031	$M_R, M_L$ [Kg]	5
$c_\theta, c_b$ [N m s]	0.002	$M_b$ [Kg]	17,2
$c_{L1}, c_{R1}$ [N m s]	0.001		

Tabla 1: Parámetros físicos del sistema usados en las simulaciones.

#### 4. RESULTADOS

Se utilizó un integrador de Runge-Kutta de Orden 4 para simular el sistema durante 500 segundos, ignorando los primeros 300 para evitar el estado transitorio. Se tomaron condiciones iniciales para  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  dentro de los intervalos  $(-\pi, \pi]$  y  $[-8, 8]$  respectivamente, mientras las coordenadas restantes inician en posición de reposo. Se comprueba que al aumentar la rigidez de los elementos que vinculan a la estructura, las respuestas rotatorias del sistema tienden al péndulo paramétrico clásico, lo que se puede observar en la Figura 5. Además, se puede apreciar que una vez pasado el estado transitorio, la aceleración de la base se reduce casi por completo, lo mismo su posición, siendo la misma estimada a partir de las expresiones de la Ecuación 3. Esto

resulta coherente dado que el modelo clásico debe corresponder a un caso particular del modelo presentado.

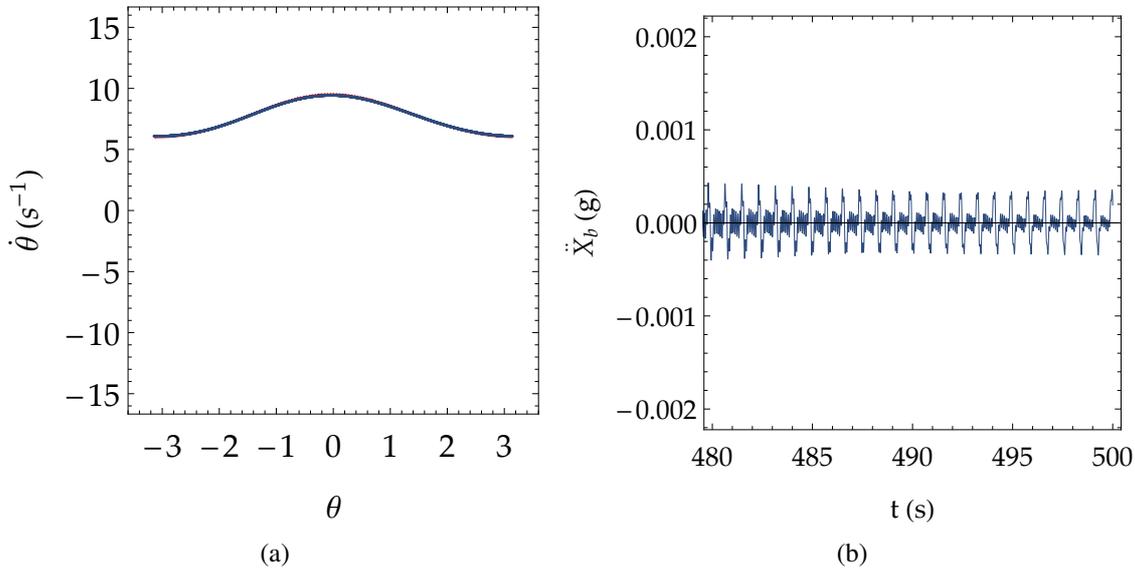


Figura 5: Simulación numérica para rigidez alta en el sistema. a) Proyección del espacio de fase  $\theta$  vs  $\dot{\theta}$  ( $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\dot{\theta}_0 = 7$ ). b) Aceleración  $\ddot{X}_b$ .

Estimar los órdenes de magnitud de los parámetros en un modelo de múltiples grados de libertad siempre constituye una tarea compleja. Esto se debe que tanto las rigideces, masas y coeficientes de amortiguación propuestos corresponden a magnitudes promediadas de varios componentes mecánicos reales, resultando en la mayoría de los casos imposibles de medir de manera directa. Debido a estos inconvenientes, los valores de parámetros se estimaron en principio a partir del planteamiento de hipótesis basadas en observaciones experimentales y razonamientos teóricos. Cabe mencionar que la sintonía fina de los parámetros debe realizarse posteriormente mediante nuevos ensayos combinados con técnicas de optimización. Tal situación no se aborda en este artículo.

Para compatibilizar el modelo con las mediciones se utilizaron los datos experimentales como referencia y se limitaron los rangos de valores de las variables, con el fin de establecer máximos que deben obtenerse en las simulaciones. Se asume que  $k_{L0}$  y  $k_{R0}$  son mayores a las rigideces  $k_{L1}$  y  $k_{R1}$ , debido a que son los elementos que relacionan los osciladores correspondientes a  $M_L$  y  $M_R$  con la estructura fija del excitador, por lo el movimiento estaría restringido por la misma. Los coeficientes de fricción se consideraron según la Tabla 1, siendo estos valores seleccionados arbitrariamente solo considerando que son menores al reportado en Dotti et al. (2023). Sumado a lo anterior, se consideran  $k_{L0} = k_{R0}$  y  $k_{L1} = k_{R1}$  para tener una primera aproximación de resultados.

Una vez establecidas las regiones de los parámetros móviles y fijados el resto de ellos, se realizaron nuevas simulaciones numéricas para explorar el sistema con el objetivo obtener nuevas respuestas que se asemejen con la experimental. En la Figura 6a puede apreciarse una respuesta rotatoria obtenida numéricamente para  $k_{R0}$  y  $k_{L0}$  igual a 450 N/m,  $k_t$  de 210 Nm y  $k_{R1}$  y  $k_{L1}$  iguales a 320 N/m. Esta respuesta se asemeja a la experimental obtenida en la Figura 6b, y presenta características similares a las anteriormente descritas, es decir, indicios de respuestas cuasiperiódicas.

Comparando la aceleración en el grado de libertad  $X_b$  con las mediciones, se aprecia que tiene un orden de magnitud similar, pero difiere en amplitud con las mediciones, lo que puede observarse en la Figura 7. Se puede observar también la diferencia de períodos que existe entre ambos resultados, lo que es un indicativo claro de que la selección de parámetros no está optimizada.

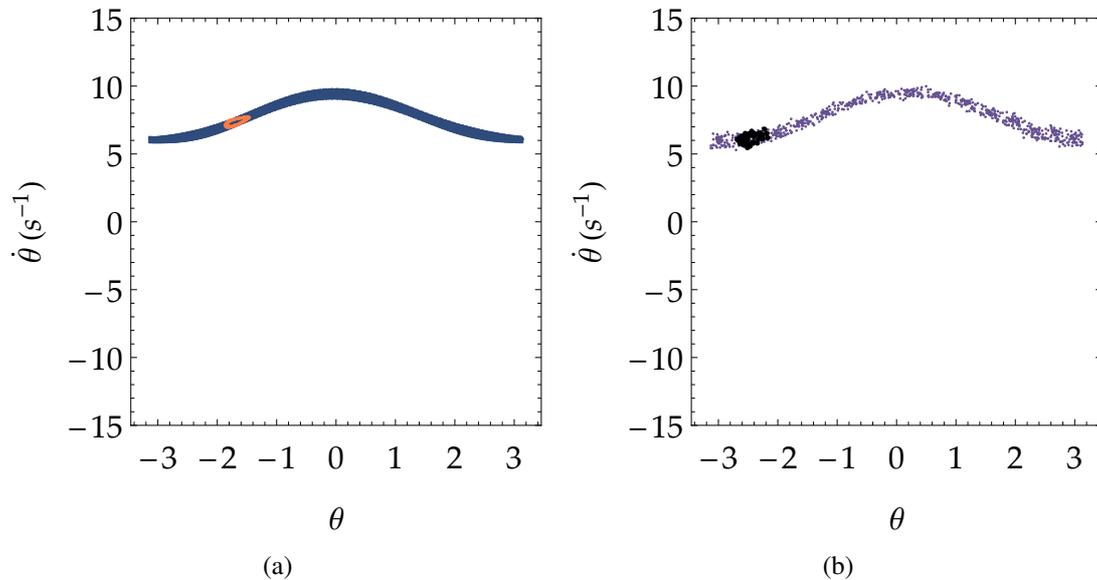


Figura 6: Proyección del espacio de fase. a) Respuesta numérica con puntos de Poincaré (naranja) ( $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\dot{\theta}_0 = 7$ ). b) Respuesta experimental con puntos de Poincaré (negro).

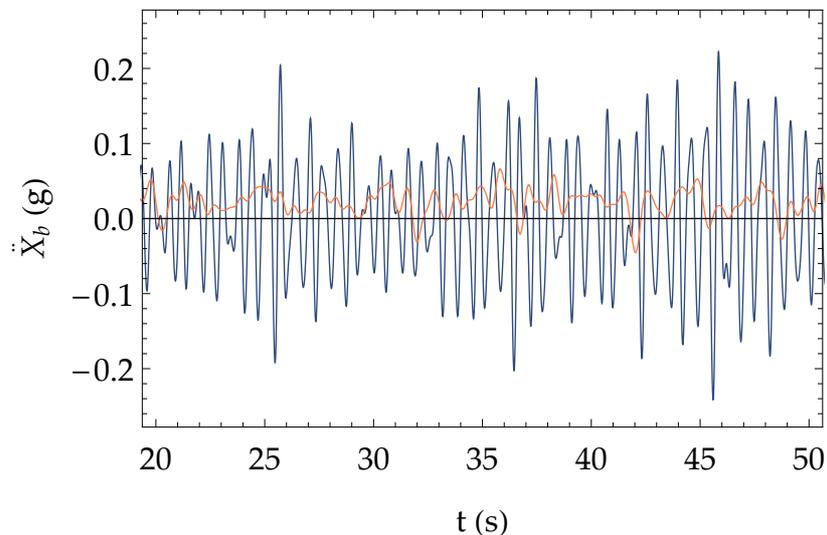


Figura 7: Comparación entre respuesta numérica (azul) y experimental (naranja) para la aceleración horizontal de la mesa ( $\ddot{X}_b$ ).

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un modelo matemático que aborda la dinámica conjunta de un péndulo paramétrico y su sistema excitador mecánico. El objetivo del mismo es capturar de una

forma más precisa la respuesta del péndulo paramétrico real, en comparación con el ampliamente utilizado modelo clásico. La necesidad de un modelo más preciso surge a partir de repetidas observaciones experimentales previas que evidencian la presencia de vibraciones espurias introducidas por un forzamiento no ideal. Tales oscilaciones no deseadas introducen respuestas aparentemente cuasiperiódicas en la dinámica del péndulo paramétrico, las cuales no son admitidas por el modelo clásico.

Las simulaciones realizadas muestran que el modelo presentado enriquece la respuesta del péndulo paramétrico, asemejándola a aquellas respuestas obtenidas a partir de mediciones experimentales. Este resultado es clave a la hora de evaluar el diseño de un control de rotaciones preciso que pueda utilizarse en aplicaciones reales, tales como la conversión de energía undimotriz mediante recolectores basados en la dinámica del péndulo paramétrico. Aun cuando la dinámica propia del péndulo se evidencia más realista con el modelo presentado, se observa que las oscilaciones estimadas para la base móvil difieren de las medidas. Esto se debe en parte a que se emplea una primera aproximación de los parámetros del sistema, no contándose con valores optimizados. Por otra parte, se contempla la propia naturaleza simplificada de un modelo vibratorio discreto, que pretende representar un sistema real complejo, muy alejado además de una condición ideal. Si bien el modelo luce prometedor, se trata de un desarrollo aún inconcluso que requiere más trabajo de investigación.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Bahía Blanca, a la Comisión Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, a la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires, y a la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica.

## REFERENCIAS

- Bishop S. y Clifford M. Zones of chaotic behaviour in the parametrically excited pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 189(1):142–147, 1996. ISSN 0022-460X. doi:<https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0011>.
- Clifford M. y Bishop S. Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Physics Letters A*, 201(2):191–196, 1995. ISSN 0375-9601. doi:[https://doi.org/10.1016/0375-9601\(95\)00255-2](https://doi.org/10.1016/0375-9601(95)00255-2).
- de Paula A., Savi M., Wiercigroch M., y Pavlovskaja E. Bifurcation control of a parametric pendulum. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22:1250111, 2012. doi:10.1142/S0218127412501118.
- Dotti F., Reguera F., y Machado S. *Rotations of the Parametric Pendulum Excited by a Reciprocating Motion with a View on Energy Harvesting: Selected Papers of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, páginas 385–397. 2019a. ISBN 978-3-319-91216-5. doi:10.1007/978-3-319-91217-2\_27.
- Dotti F. y Virla J.N. Nonlinear dynamics of the parametric pendulum with a view on wave energy harvesting applications. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 16, 2021. doi:10.1115/1.4050699.
- Dotti F.E., Luna S.A., Oxarango L., Virla J.N., y Rojas L.M. Experimental rotation control of the parametric pendulum using a velocity approach. *Mechanics Research Communications*, 129:104085, 2023. ISSN 0093-6413. doi:<https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2023.104085>.

- Dotti F.E., Reguera F., y Machado S.P. Rotations of the parametric pendulum excited by a reciprocating motion with a view on energy harvesting. En A.d.T. Fleury, D.A. Rade, y P.R.G. Kurka, editores, *Proceedings of DINAME 2017*, páginas 385–397. Springer International Publishing, Cham, 2019b. ISBN 978-3-319-91217-2.
- Garira W. y Bishop S. Rotating solutions of the parametrically excited pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 263:233,239, 2003. doi:10.1016/S0022-460X(02)01435-9.
- Najdecka A., Narayanan S., y Wiercigroch M. Rotary motion of the parametric and planar pendulum under stochastic wave excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 71:30–38, 2015. ISSN 0020-7462. doi:https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.12.008.
- Nandakumar K., Wiercigroch M., y Chatterjee A. Optimum energy extraction from rotational motion in a parametrically excited pendulum. *Mechanics Research Communications*, 43:7–14, 2012. ISSN 0093-6413. doi:https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2012.03.003.
- Vaziri V., Najdecka A., y Wiercigroch M. Experimental control for initiating and maintaining rotation of parametric pendulum. *The European Physical Journal Special Topics*, 223:795–812, 2014. doi:10.1140/epjst/e2014-02141-y.
- Wiercigroch M. A new concept of energy extraction from waves via parametric pendulum. *UK patent application*, 2010.
- Xu X., Pavlovskaja E., Wiercigroch M., Romeo F., y Lenci S. Dynamic interactions between parametric pendulum and electrodynamic shaker. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 87:172 – 186, 2007. doi:10.1002/zamm.200610311.
- Yurchenko D. y Alevras P. Dynamics of the n-pendulum and its application to a wave energy converter concept. *International Journal of Dynamics and Control*, 1, 2013. doi:10.1007/s40435-013-0033-x.