

## ESTUDIO NUMÉRICO DEL FENÓMENO DE OIL WHIP EN EJES ELÁSTICOS SOPORTADOS POR COJINETES HIDRODINÁMICOS

### NUMERICAL STUDY OF THE OIL WHIP PHENOMENON IN ELASTIC SHAFTS SUPPORTED BY HYDRODYNAMIC JOURNAL BEARINGS

Jorge A. Palavecino<sup>a,b</sup>, Martín Zanatta<sup>a,c</sup>, Federico J. Cavalieri<sup>a,c</sup> y Santiago Márquez  
Damián<sup>a,c</sup>

<sup>a</sup>Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC - CONICET/UNL), Predio Dr. Alberto Cassano, Ruta Nac. N° 168, Km. 0, Santa Fe, Argentina, <https://cimec.conicet.gov.ar/>

<sup>b</sup>Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (UNPSJB), Ruta Prov. N°1, Comodoro Rivadavia, Argentina

<sup>c</sup>Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Santa Fe, Lavaise 610, Santa Fe, Argentina

**Palabras clave:** Lubricación, Vibraciones, Resonancia, Cojinetes Hidrodinámicos.

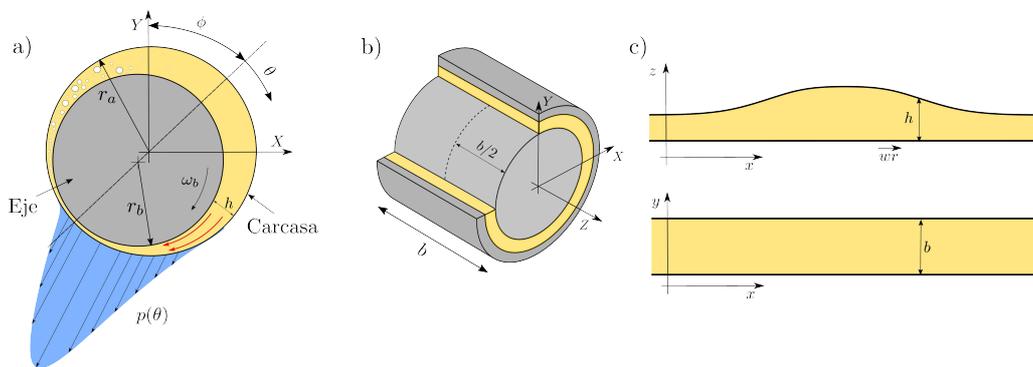
**Resumen.** El oil whirl consiste en una inestabilidad de la película lubricante del cojinete hidrodinámico debido a una pérdida de su capacidad de carga en condiciones de baja sollicitación. Esta inestabilidad produce una vibración sub-sincrónica a la mitad de la velocidad de rotación del eje. Cuando la rotación alcanza el doble de la frecuencia natural, la frecuencia de vibración permanece constante y cercana al valor de la primera frecuencia de resonancia. Este último fenómeno se denomina oil whip y resulta perjudicial para la vida útil del rotor. En este trabajo se analiza el comportamiento de un rotor unidimensional elástico a partir del Método de Elementos Finitos. Se analizan casos de la literatura con discos y masas desbalanceadas para determinar sus efectos en la inestabilidad del eje. Se comparan también los resultados obtenidos a partir de utilizar modelos dinámicos lineales y no lineales para la representación de los cojinetes hidrodinámicos.

**Keywords:** Lubrication, Vibraciones, Resonance, Journal Bearings.

**Abstract.** Oil whirl consists of an instability of the lubricating film of the hydrodynamic bearing due to a loss of its load capacity under low load conditions. This instability produces a sub-synchronous vibration at half the shaft rotation speed. When the rotation reaches twice the natural frequency, the vibration frequency remains constant and close to the value of the first resonance frequency. This last phenomenon is called oil whip and is detrimental to rotor life. In this work, the behavior of a one-dimensional elastic rotor is analyzed using the Finite Element Method. Literature cases with unbalanced discs and masses are analyzed to determine their effects on shaft instability. The results obtained from using linear and nonlinear dynamic models for the representation of the hydrodynamic bearings are also compared.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los cojinetes hidrodinámicos son componentes esenciales en la maquinaria rotativa. Su función principal es facilitar el movimiento de un eje dentro de una carcasa fija, evitando el contacto directo entre ambas superficies mediante una película lubricante (Fig. 1.a y b). El lubricante contenido entre la superficie rotante y la que se encuentra estática, es desplazado por efecto viscoso hacia una región convergente generando una elevación de la presión y evitando el contacto entre ambos sólidos. La capacidad portante del cojinete dependerá de parámetros geométricos como el largo  $b$ , el radio del rotor  $r_b$ , el huelgo entre las superficies solidas  $c$ , la viscosidad del lubricante  $\mu$  y la velocidad de rotación  $\omega_b$  (Hamrock, 1994; Pinkus y B., 1961; Khonsari y E.R., 2017).

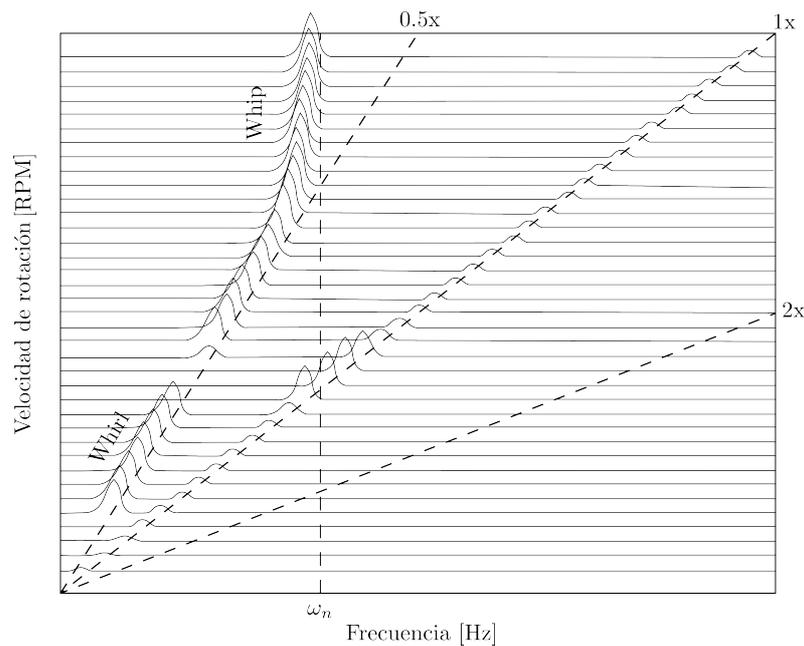


**Figura 1:** Referencias geométricas de un cojinete hidrodinámico.

El estudio de la dinámica de ejes soportados en cojinetes hidrodinámicos resulta de interés debido a la influencia que tiene el acoplamiento de ambos elementos de máquina en el comportamiento estable e inestable del eje. Este comportamiento está estrictamente relacionado con la elasticidad y amortiguación que produce la película lubricante (Friswell et al., 2010). A su vez, el cojinete presenta sus propias regiones de comportamiento inestable que pueden afectar a su funcionamiento. Es conocido que la interacción entre el rotor y el cojinete generan vibraciones aún mayores a las esperadas por la vibración de la viga elástica (Muszynska, 1986).

Al analizar el comportamiento de la vibración del eje a diferentes velocidades de funcionamiento, pueden caracterizarse tres fenómenos distintivos. En primer lugar, en la Fig. 2 se observa la vibración sincrónica ( $1x$ ) correspondiente a la viga elástica la cuál presenta una mayor amplitud en cercanías de la frecuencia natural de resonancia ( $\omega_n$ ). A su vez, la vibración subsincrónica ( $\approx 0.5x$ ) corresponde con la velocidad de precesión  $\dot{\phi}_n$  inestable del eje en el cojinete hidrodinámico. Esta inestabilidad, depende principalmente de las características del cojinete utilizado, se denomina *oil whirl* y se produce debido a una pérdida de la capacidad portante de la película lubricante en condiciones de baja sollicitación. El *oil whirl* produce además una vibración sub-sincrónica a la mitad de la velocidad de rotación del eje. Por otra parte, cuando la velocidad de precesión inestable alcanza el valor de  $\omega_n$  ( $\dot{\phi}_n = 0.5 \omega_b = \omega_n$ ), la frecuencia de vibración permanece constante y cercana al valor de la primera frecuencia de resonancia de la viga. Este último fenómeno se denomina *oil whip* y resulta perjudicial para la vida útil del rotor (Muszynska, 1988; Ma et al., 2014).

Las matrices elementales utilizadas para discretizar el dominio unidimensional fueron publicadas por Nelson y McVaugh (1976) junto con una formulación para moldear el conjunto rotor-cojinete incluyendo discos y desbalanceos. Esta formulación puede realizarse para una terna de ejes de referencia fijos o rotantes en conjunto con el eje considerando el efecto de la



**Figura 2:** Cascada del espectro de la vibración del rotor (Muszynska, 1986).

inercia, de los momentos giroscópicos. Por otro lado, los cojinetes hidrodinámicos son considerados como un elemento resorte-amortiguador de forma que la formulación global del problema es lineal.

Para determinar el comportamiento dinámico del conjunto rotor-cojinete, Birembaut y Peigney (1980) utilizan un método de perturbación y un modelo por diferencias finitas que permite determinar el campo de presiones de la película lubricante para calcular los coeficientes elásticos y de amortiguamiento para diferentes condiciones de operación lo que permite linealizar el sistema dinámico. Por su parte, el rotor es analizado como una viga flexible utilizando el Método de Elementos Finitos. Posteriormente, al rotor se le adicionan discos que aportan masa y efectos giroscópicos al sistema. Los autores analizan el comportamiento resonante del sistema rotor-discos-cojinete de forma numérica y experimental obteniendo gran concordancia entre los ambos resultados.

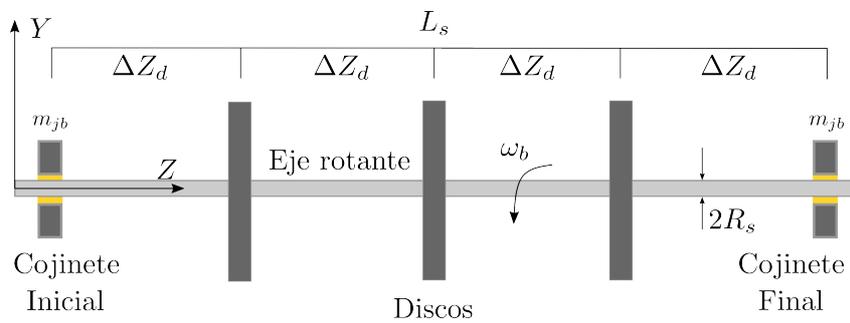
La representación de los cojinetes a partir de la solución analítica de Ocvirk es una de las alternativas más utilizadas en los modelos no lineales. Esta formulación permite una mejor representación del comportamiento dinámico del sistema a costa de un mayor costo de cálculo. de Castro et al. (2008) utiliza un modelo no lineal basado en la solución analítica para cojinetes infinitamente cortos para representar la fuerza hidrodinámica del cojinete y valida los resultados obtenidos a partir de ensayos experimentales. El trabajo hace foco en mostrar el efecto de las masas de desbalanceo y de la dirección del eje (posición horizontal o vertical) en el umbral de entrada en inestabilidad. Otro ejemplo de un estudio no lineal es el trabajo publicado por Ma et al. (2014) donde se muestran los efectos de dos condiciones de carga a partir de excitaciones producidas por el desbalanceo para determinar las frecuencias de resonancia y las respuestas considerando a los cojinetes a partir de la teoría del cojinete infinitamente corto. En este caso se hace uso de un modelo de masas concentradas obteniéndose una muy buena concordancia con lo publicado previamente en la bibliografía (Friswell et al., 2010).

Sobre la base de los trabajos encontrados en la literatura, en este trabajo se utiliza el rotor propuesto por Birembaut y Peigney (1980) para realizar la validación de un eje flexible con discos y masas desbalanceadas y posteriormente analizar la trayectoria recorrida por el eje a

partir de utilizar modelos dinámicos lineales y no lineales para la representación de los cojinetes hidrodinámicos. A continuación, se presenta el modelo numérico utilizado para representar la interacción entre el eje y los cojinetes, seguido de una descripción detallada de los métodos empleados para analizar las condiciones dinámicas del sistema.

## 2. MODELO NUMÉRICO

Para realizar el estudio de las velocidades de resonancia se realiza una discretización mediante el Método de Elementos Finitos de la viga flexible. El modelo es simplificado considerando las siguientes suposiciones: El rotor puede considerarse como un elemento unidimensional con área constante, el movimiento en dirección axial está restringido, el comportamiento del material es lineal e isótropo y se considera válida la teoría de Euler-Bernoulli en todo el dominio (Ma et al., 2014; Öchsner y Merkel, 2018; Friswell et al., 2010).



**Figura 3:** Esquema de la geometría del sistema rotor-cojinetes.

El modelo matemático para el sistema rotor-cojinete queda descrito por la Ec. (1) en función de los vectores posición  $\mathbf{X}$ , velocidad  $\dot{\mathbf{X}}$  y aceleración  $\ddot{\mathbf{X}}$ . La matriz  $\mathbf{K}_b$  corresponde a la rigidez de la viga elástica, así como  $\mathbf{M}_T$  y  $\mathbf{M}_R$  se corresponden con las matrices de masa en traslación y en rotación respectivamente. Las matrices  $\mathbf{K}_b$  y  $\mathbf{C}_b$  consideran el aporte de los cojinetes hidrodinámicos a la matriz de rigidez y amortiguamiento del sistema. Finalmente, la matriz  $\mathbf{G}$  considera los efectos giroscópicos que dependen de la velocidad angular  $\omega_b$  del eje. La carga externa o la fuerza ejercida por una masa de desbalanceo se adiciona a través del término  $\mathbf{F}$ . Este sistema de ecuaciones se resuelve a partir del método de integración temporal Newmark.

$$(\mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R)\ddot{\mathbf{X}} + (\mathbf{C}_b + \omega_b \mathbf{G})\dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K}_b + \mathbf{K})\mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

Los modelos a partir de los cuales se considera la contribución de los cojinetes al sistema se describen en las subsecciones a continuación.

### 2.1. Modelo lineal para cojinetes cortos.

El comportamiento dinámico de los cojinetes hidrodinámicos puede abordarse desde una mirada simplificada considerando su efecto a través de constantes elásticas y de amortiguamiento. El valor de estas constantes dependerán de los parámetros de funcionamiento del rotor y de las propiedades físicas del lubricante Szeri (2011). En el caso de cojinetes de corta longitud (Relación  $b/D < 0,5$ ), la solución propuesta por Ocvirik (1952) otorga una muy buena aproximación y permite calcular la capacidad portante generada por la película lubricante.

A partir de asumir, pequeños desplazamientos del eje rotante respecto de un punto de equilibrio, el desarrollo mostrado en las Ecs. (2) y (3) permite linealizar las fuerzas producidas por la película de fluido y obtener las siguientes relaciones:

$$F_{X_1} = \frac{\partial F_{X_1}}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial F_{X_1}}{\partial X_2} \Delta X_2 + \frac{\partial F_{X_1}}{\partial \dot{X}_1} \Delta \dot{X}_1 + \frac{\partial F_{X_1}}{\partial \dot{X}_2} \Delta \dot{X}_2 + \frac{\partial F_{X_1}}{\partial \ddot{X}_1} \Delta \ddot{X}_1 + \frac{\partial F_{X_1}}{\partial \ddot{X}_2} \Delta \ddot{X}_2 \quad (2)$$

$$F_{X_2} = \frac{\partial F_{X_2}}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial F_{X_2}}{\partial X_2} \Delta X_2 + \frac{\partial F_{X_2}}{\partial \dot{X}_1} \Delta \dot{X}_1 + \frac{\partial F_{X_2}}{\partial \dot{X}_2} \Delta \dot{X}_2 + \frac{\partial F_{X_2}}{\partial \ddot{X}_1} \Delta \ddot{X}_1 + \frac{\partial F_{X_2}}{\partial \ddot{X}_2} \Delta \ddot{X}_2 \quad (3)$$

donde se desprecian los diferenciales de orden superior y se definen a los coeficientes elásticos y de amortiguamiento que permiten linealizar al cojinete hidrodinámico como:

$$K_{ij} = -\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \quad C_{ij} = -\frac{\partial F_i}{\partial \dot{X}_j} \quad (4)$$

De esta forma, el sistema linealizado para las fuerzas hidrodinámicas queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} F_{X_1} \\ F_{X_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{X_1X_1} & K_{X_1X_2} \\ K_{X_2X_1} & K_{X_2X_2} \end{bmatrix} \mathbf{X} - \begin{bmatrix} C_{X_1X_1} & C_{X_1X_2} \\ C_{X_2X_1} & C_{X_2X_2} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} = -\mathbf{K}_b \mathbf{X} - \mathbf{C}_b \dot{\mathbf{X}} \quad (5)$$

Dado que el valor de la fuerza hidrodinámica de la película de fluido es un resultado analítico, los coeficientes se obtienen a partir de realizar la derivación de la expresión para  $F_x$  y  $F_y$  correspondiente a la solución de Ocvirk. Estos coeficientes luego deben ser adicionados en las posiciones de la matriz global que se correspondan con los nodos de la malla en los cuales estén colocados los cojinetes.

## 2.2. Modelo no lineal para cojinetes cortos (ISJB).

Para el análisis no lineal es necesario considerar los cojinetes como contribuciones al vector de fuerzas externas  $\mathbf{F}$  y no como aportes a la matriz de rigidez y amortiguamiento. La fuerza hidrodinámica que soporta al eje es considerada a partir de la solución de Ocvirk para cojinetes infinitamente cortos (*Infinite Short Journal Bearing - ISJB*). El valor de esta fuerza es dependiente del valor de la posición y de la velocidad del centro de masa del rotor respecto de la carcasa. Este acoplamiento se resuelve de forma no monolítica calculando en primer lugar la capacidad de carga de la película lubricante en un tiempo dado  $F_t$  y a continuación la posición resultante para el paso de tiempo siguiente  $X_{t+1}$ . La velocidad del rotor debe descomponerse en las direcciones radiales ( $\dot{\epsilon}$ ) y tangenciales ( $\dot{\phi}$ ) de forma de contribuir correctamente a los términos de la Ecuación de Reynolds referidos al *squeeze* generado entre ambas superficies sólidas en movimiento relativo.

$$p = p_0 + \frac{6\mu}{c^2} \left( \frac{b^2}{4} - z^2 \right) \left[ \frac{\frac{1}{2}(\omega_b - 2\dot{\phi}(t))\epsilon(t) \sin \theta + \dot{\epsilon} \cos \theta}{(1 + \epsilon(t) \cos \theta)^3} \right] \quad (6)$$

$$F_Y(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^b p(\theta, y, t) \text{sen}(\theta) d\theta dy \quad (7)$$

$$F_X(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^b p(\theta, y, t) \text{cos}(\theta) d\theta dy \quad (8)$$

### 2.3. Modelo no lineal para cojinetes reales.

De igual manera que en la situación anterior, este modelo considera los cojinetes como contribuciones al vector de fuerzas  $\mathbf{F}$ . Sin embargo, en este caso se utiliza un código desarrollado a partir del Método de Volúmenes Finitos para calcular el campo de presiones de la película lubricante en cojinetes de longitud finita. El modelo desarrollado, denominado `dynCav` (Palavecino et al., 2024), describe el comportamiento de la película lubricante en el dominio resolviendo una ecuación difusiva para el campo de presiones y una ecuación de transporte para la fracción vapor de lubricante producida por la cavitación. El lubricante es considerado como un medio continuo utilizando las hipótesis clásicas del flujo de lubricación (Szeri, 2011). El código `dynCav` por lo tanto permite obtener el valor de cada coeficiente independizándose de las limitaciones de la solución de Ocvirk que considera cojinetes de longitud infinitamente corta lo que permite estudiar la dinámica de un cojinete real. Esta herramienta permite considerar la influencia de la presencia de cavitación vaporosa o gaseosa, de efectos térmicos así como también del uso de texturas superficiales en la dinámica del muñón.

## 3. RESULTADOS

A partir del modelado numérico del conjunto rotor-cojinete se obtienen los desplazamientos que realiza el centro de masa del eje en cada uno de los casos propuestos. Esta comparación de los recorridos realizados permite conocer como es el comportamiento dinámico bajo cada una de las suposiciones realizadas. En todos los casos se hace uso del rotor propuesto por Birembaut y Peigney (1980). La Fig. 3 muestra un esquema del eje y los discos que conforman el rotor. La viga es considerada como un elemento flexible. Los parámetros geométricos y de funcionamiento se muestran en la Tabla 1.

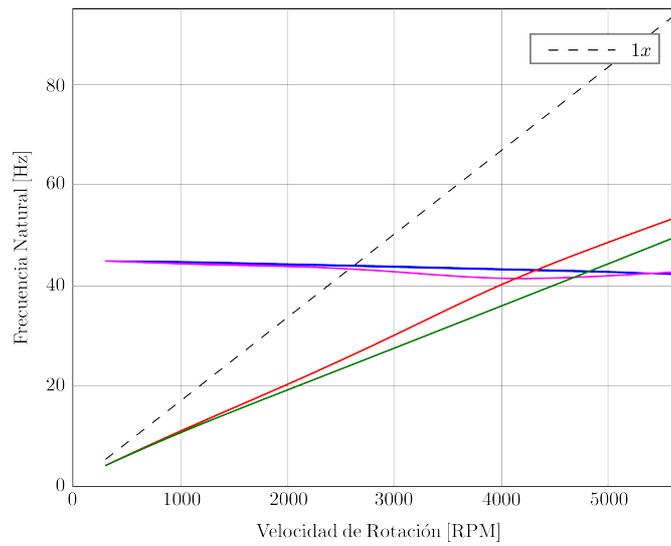
Tal como se comentó, los cojinetes hidrodinámicos se resuelven a partir de un modelo lineal (simplificando como elementos masa-resorte-amortiguador) y de dos modelos no lineales (a partir de la solución de Ocvirk y de un modelo numérico de Volúmenes Finitos).

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$r_b$ [mm]	20.056	$F_{ext}$ [N]	518
$c$ [ $\mu\text{m}$ ]	59	$L_s$ [m]	0.8
$b$ [mm]	24	$E$ [GPa]	210
$\mu$ [mPa.s]	29	$R_s$ [mm]	20
$m_{jb}$ [kg]	2.29	$\omega_b$ [ $\text{s}^{-1}$ ]	314.15
$I_{t,d}$ [ $\text{m}^4$ ]	0.0511	$I_{p,d}$ [ $\text{m}^4$ ]	0.102
$\Delta Z_d$ [m]	0.2	$m_{unba}$ [kg.m]	0.00012

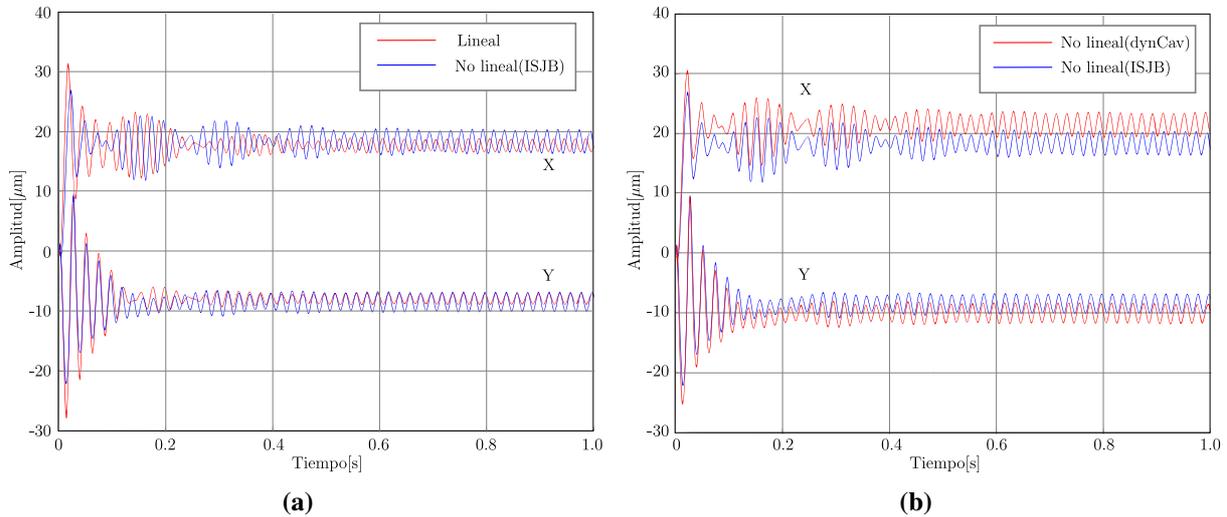
**Tabla 1:** Parámetros del conjunto eje-cojinetes utilizado (Birembaut y Peigney, 1980).

### 3.1. Validación de resultados

La validación de los resultados se realiza a partir del estudio de velocidades críticas que está reportado en la bibliografía (Birembaut y Peigney, 1980). En la Fig. 4 se muestra el diagrama de Campbell correspondiente al rotor en estudio. Este diagrama representa el espectro de respuestas del sistema como una función de la velocidad de rotación. Este estudio se realiza a partir de linealizar el sistema para velocidades comprendidas entre las 300 y 5700 RPM. La primera velocidad crítica obtenida es aproximadamente 2630 RPM (280 rad/s).



**Figura 4:** Diagrama de Campbell para el rotor analizado por Birembaut y Peigney (1980).



**Figura 5:** Comparación del desplazamiento en X e Y de la trayectoria entre: a) modelo Lineal y No lineal (ISJB), b) código dynCav y solución ISJB.

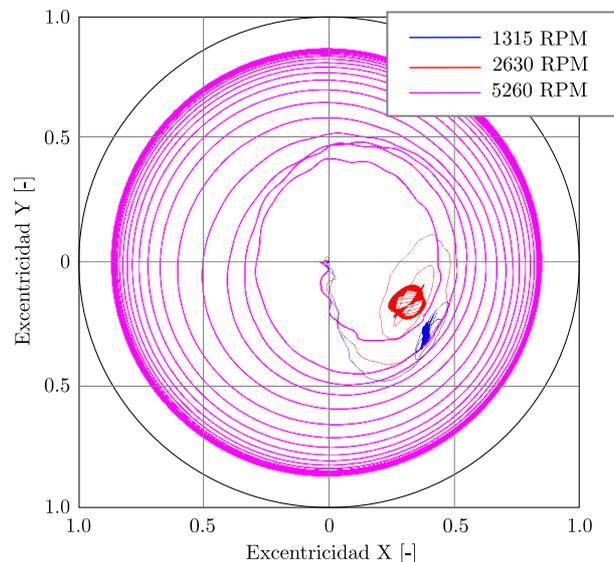
### 3.2. Dinámica del transitorio de funcionamiento

La dinámica del eje se calculó con cada uno de los métodos propuestos para un tiempo de 1 segundo utilizando 40 elementos lineales y un paso de tiempo  $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$ . En la Fig. 5a se muestra la variación de posición en las coordenadas X e Y (Fig. 1.a) del centro de masa del eje rotante para  $Z = 0$  (posición coincidente con el cojinete inicial). Se observa que debido a que ambas formulaciones surgen a partir de la misma teoría, los dos modelos oscilan alrededor de la misma posición de equilibrio siendo el caso no lineal el que presenta una órbita de mayor amplitud. La Fig. 5b muestra la diferencia en la amplitud del desplazamiento y en la posición de equilibrio utilizando la expresión analítica para determinar la capacidad de carga en cojinetes cortos y el código dynCav.

Se observa que el uso del modelo numérico para estimar la capacidad portante de cojinetes reales alcanza magnitudes de desplazamiento mayores lo cual es consistente con lo esperado debido a que la teoría ISJB tiene a sobrestimar el campo de presiones cuando es usada en

cojinetes reales. Esto es un indicio importante ya que la diferencia en un cojinete con una relación  $b/D \approx 0.5$  como el del caso de estudio alcanza valores de un 15 % en algunos puntos de la amplitud de vibración.

Como ultimo caso, se obtienen las trayectorias para tres velocidades de rotación a modo de reportar la influencia de la frecuencia de resonancia y del whirl/whip en la trayectoria. Como se observa en Fig. 6, la trayectoria que corresponde con la frecuencia de resonancia (2630 RPM) permanece orbitando alrededor de una posición de equilibrio. A velocidades menores ( $0.5 \omega_n$ ) se observa que el eje tiende a converger a un punto de equilibrio, tal como ocurre en los casos donde se utilizan los modelos basados en un eje rígido. Por último, el caso a 5260 RPM corresponde al doble de la velocidad de resonancia, velocidad en la cuál el sistema se inestabiliza completamente y comienza a precesionar con una orbita mucho mayor. La velocidad de precesión  $\dot{\phi}$  obtenida en este caso es de  $\approx 280$  rad/s (2635 RPM). Esta velocidad es coincidente con la velocidad reportada en la bibliografía para la ocurrencia del whip (Birembaut y Peigney, 1980) lo cuál valida el código desarrollado para la caracterización del comportamiento dinámico en vigas elásticas y la determinación de este fenómeno resonante.



**Figura 6:** Trayectorias obtenidas según las RPM de funcionamiento.

#### 4. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

En este trabajo se realizó el estudio de la dinámica de ejes soportados por cojinetes hidrodinámicos considerando la elasticidad de la viga rotante, la amortiguación interna, la presencia de discos, de efectos giroscópicos y de masas de desbalanceo. Se realizó el cálculo de las deformaciones de la viga a partir de un método de elementos finitos utilizando un modelo lineal que simplifica los cojinetes hidrodinámicos como elementos masa-resorte-amortiguador. Luego se hizo uso de un modelo no lineal que utilice la solución analítica de Ocvirk (ISJB) para calcular la capacidad portante. Posteriormente se realizó el acoplamiento del modelo elástico con un código que calcula la fluidodinámica de la película lubricante a partir del Método de Volúmenes Finitos. De estos análisis, se muestra la diferencia en las trayectorias obtenidas según la forma de modelar los cojinetes hidrodinámicos. Finalmente, se utiliza el modelo no lineal basado en la solución de cojinetes cortos para mostrar las trayectorias que recorre el centro de masa del rotor cuando se encuentra a una velocidad por debajo, por encima o de igual magnitud a la frecuencia

de resonancia.

Como trabajo futuro se estudiará el comportamiento de la rotodinámica ante la presencia de rampas de velocidad y del efecto de las masas de desbalanceo en las inestabilidades presentadas por alcanzar las velocidades de whirl y whip. A su vez, utilizará el acoplamiento del modelo de viga elástica con el código `dynCav` para analizar la influencia del uso de texturas superficiales en el muñón. La introducción de este texturado en la superficie rotante genera fluctuaciones en un múltiplo de la velocidad de rotación igual a la cantidad de texturas, lo que adelanta la resonancia a regímenes de funcionamiento mucho menos solicitados.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el financiamiento provisto por CONICET (Beca doctoral Jorge A. Palavecino) y de la Universidad Tecnológica Nacional a través del proyecto PID-UTN-8685 “Métodos numéricos para flujos a bajos números de Reynolds con aplicaciones en ingeniería civil y mecánica”. También agradecen al Dr. Gustavo Vignolo por las valiosas discusiones sobre la dinámica de ejes flexibles, las cuales fueron fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

## REFERENCIAS

- Birembaut Y. y Peigney J. Prediction of dynamic properties of rotor supported by hydrodynamic bearings using the finite element method. *Computers & Structures*, 12(4):483–496, 1980. ISSN 0045-7949.
- de Castro H.F., Cavalca K.L., y Nordmann R. Whirl and whip instabilities in rotor-bearing system considering a nonlinear force model. *Journal of Sound and Vibration*, 317(1):273–293, 2008. ISSN 0022-460X. doi:<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.02.047>.
- Friswell M., Penny J., Garvey S., y Lees A. *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780521850162. doi:10.1017/CBO9780511780509.
- Hamrock B. *Fundamentals of fluid film lubrication*. McGraw-Hill, 1994.
- Khonsari M. y E.R. B. *Applied tribology: bearing design and lubrication, 3rd edition*. John Wiley & Sons Ltd, 2017.
- Ma H., Li H., Niu H., Song R., y Wen B. Numerical and experimental analysis of the first-and second-mode instability in a rotor-bearing system. *Archive of Applied Mechanics*, 84, 2014. doi:10.1007/s00419-013-0815-9.
- Muszynska A. Whirl and whip rotor/bearing stability problems. *Journal of Sound and Vibration*, 110(3):443–462, 1986. ISSN 0022-460X.
- Muszynska A. Stability of whirl and whip in rotor/bearing systems. *Journal of Sound and Vibration*, 127(1):49–64, 1988. ISSN 0022-460X.
- Nelson H.D. y McVaugh J.M. The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements. *Journal of Engineering for Industry*, 98(2):593–600, 1976.
- Ocvirk F. Short-bearing approximation for full journal bearings. *Cornell University*, 10, 1952.
- Palavecino J., Cavalieri F., y Márquez Damián S. A second-order in time and space model to solve the coupled reynolds–rayleigh–plesset equations for the dynamics of cavitated hydrodynamic journal bearings. *Tribology International*, 192:109206, 2024. ISSN 0301-679X.
- Pinkus O. y B. S. *Theory of hydrodynamic lubrication*. Mc-Graw Hill, 1961.
- Szeri A. *Fluid film lubrication, 2nd edition*. Cambridge University Press, 2011.
- Öchsner A. y Merkel M. *One-Dimensional Finite Elements*. Springer, 2018. ISBN 978-3-319-75144-3. doi:10.1007/978-3-319-75145-0.