

DESAFÍOS EN LA SIMULACIÓN DE FLUJOS DOMINADOS POR VORTICIDAD: VENTAJAS, LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS DE LA INCORPORACIÓN DE PARTÍCULAS VORTICOSAS A LOS MÉTODOS TRADICIONALES

CHALLENGES IN THE SIMULATION OF VORTICITY-DOMINATED FLOWS: ADVANTAGES, LIMITATIONS, AND PERSPECTIVES OF INCORPORATING VORTEX PARTICLES INTO TRADITIONAL METHODS

Santiago Ribero^{a, b}, Martín E. Pérez Segura^{a, b}, Agostina C. Aichino^a, Emmanuel Beltramo^{a, b}, Bruno A. Rocca^c y Sergio Preidikman^{a, b}

^a*Inst. de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina*

^b*Dpto. de Estructuras, Fac. de Cs. Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina*

^c*Geophysical Institute (GFI) and Bergen Offshore Wind Centre (BOW), University of Bergen, Norway*

Palabras clave: Red de Vórtices, Partículas Vorticosas, Aerodinámica Inestacionaria.

Resumen. El concepto de flujo dominado por vorticidad ha sido ampliamente utilizado en la formulación de métodos de simulación aerodinámica. Este trabajo extiende el método de red de vórtices inestacionario (UVLM) mediante el uso del método de partículas vorticosas (VPM), un modelo híbrido que combina partículas y segmentos vorticosos. La incorporación del VPM elimina la estructura de malla de las estelas, pero su uso puede resultar inestable y requerir consideraciones adicionales para su implementación. En este sentido, se analiza una serie de casos para destacar las virtudes, identificar los posibles inconvenientes y formular recomendaciones sobre el uso del VPM. Los resultados colaboran con el entendimiento de los desafíos asociados con la implementación del VPM y proporcionan perspectivas valiosas sobre cómo aprovechar sus ventajas en diferentes aplicaciones de interacción aerodinámica y flujos alrededor de cuerpos sumergidos.

Keywords: Vortex Lattice Method, Vortex Particle Method, Unsteady Aerodynamics.

Abstract. The concept of vorticity-dominated flow has been widely used in the formulation of aerodynamic simulation methods. This work extends the unsteady vortex lattice method (UVLM) by incorporating the vortex particle method (VPM), a hybrid model that combines particles and vortex segments. The use of VPM eliminates the wake mesh structure, but it can be unstable and may require additional considerations for implementation. In this regard, a series of cases are analyzed to highlight the benefits, identify potential drawbacks, and provide recommendations on the use of VPM. The results contribute to understanding the challenges associated with VPM implementation and offer valuable insights into leveraging its advantages in various aerodynamic interaction applications and flows around submerged bodies.

1. INTRODUCCIÓN

El modelado y la simulación del campo de movimiento de un fluido suponen un desafío significativo cuando se busca describir la física subyacente en aplicaciones de interacción aerodinámica compleja (IAC). Estos problemas de IAC incluyen, desde la perturbación global del flujo debido a las estelas generadas por otros cuerpos inmersos en la corriente, hasta fenómenos de interacción local entre las estelas, el cuerpo y superficies cercanas. Ejemplos de tales situaciones abarcan desde la interferencia de estelas entre aerogeneradores en un parque eólico, la modificación del campo de flujo alrededor de formaciones en tándem de vehículos aéreos, hasta el flujo alrededor de un helicóptero y la alteración aerodinámica del rotor causada por el efecto del suelo durante el despegue (Alvarez y Ning, 2022), entre otros.

Los modelos de estelas libres en aerodinámica subsónica, por lo general, son resueltos mediante el método de red de vórtices inestacionario (UVLM, por sus siglas es inglés). El UVLM es un método basado en una red de filamentos vorticosos, permite determinar las cargas aerodinámicas actuantes sobre las superficies sustentadoras y modelar las estelas que se convectan desde los bordes de fuga de estas superficies con buena precisión y a un bajo costo computacional (Pérez Segura, 2018). Desde el punto de vista de la formulación, el UVLM presenta algunas limitaciones en el modelado de las estelas libres cuando dichas estelas impactan entre ellas o sobre otras superficies inmersas en la corriente fluida, como ocurre en los problemas de IAC. Una alternativa que encontraron los investigadores a estas limitaciones fue el desarrollo de una técnica híbrida para el estudio de IAC. Esta técnica se basa en la *transformación* de los filamentos vorticosos en partículas vorticosas.

En el método de partículas vorticosas (VPM, por sus siglas es inglés), las estelas libres son modeladas por regiones compactas de vorticidad. El VPM permite extender al UVLM, ya que las partículas que se convectan, conservan su estructura vorticosa como puntos materiales (comportamiento *Lagrangiano*). Además de su capacidad de representar sistemas físicamente complejos, se asegura la convergencia numérica de la solución, precisión, eficiencia y buen rendimiento computacional (Mimeau y Mortazavi, 2021). No obstante, la eliminación de la dependencia de la malla, que aparece como una ventaja potencial fuerte, se convierte, también, en una necesidad de resolver la ecuación de vorticidad de forma explícita para determinar el campo de vorticidad en cada instante de tiempo. De esta forma, el mecanismo de intensificación y orientación de la intensidad de cada partícula debe ser cuidadosamente implementado, a fin de lograr una simulación de largo período de tiempo.

En el presente trabajo se aborda el análisis del comportamiento particular que tienen el VPM. Se presentan los fundamentos teóricos para el modelado de flujo potencial y se introduce un método de red de vórtices modificado con partículas vorticosas. Allí, se discuten aspectos generales de la formulación y se identifican los parámetros fundamentales de modelado que permiten el uso de este método. Luego se presentan y discuten los resultados en los que se destacan ventajas y limitaciones en el uso del método propuesto. Finalmente, se presentan las conclusiones y las perspectivas en el uso de esta técnica.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Tradicionalmente, el flujo se describe mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, Ec. (1), y se expresan en términos de la velocidad del fluido en cualquier punto.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ es el campo de velocidad y $p = p(\mathbf{r}, t)$ es el campo de presión, ambos en la posición \mathbf{r} y en el tiempo t , ρ y ν son la densidad y la viscosidad cinemática del fluido, respectivamente.

La vorticidad $\boldsymbol{\omega}$ del fluido se define como el rotacional del campo de velocidad ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$). La dinámica del flujo queda completamente definida con la ecuación del transporte de vorticidad, Ec. (2), que se obtiene de tomar el rotacional sobre la Ec. (1). De esta forma, se elimina la dependencia de la presión.

$$\frac{D}{Dt} \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (2)$$

donde $\frac{D}{Dt}(\cdot)$ representa el operador derivada material, $\frac{D}{Dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\cdot)$.

En flujos incompresibles, la divergencia del campo de velocidad es cero ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), por lo tanto, la relación cinemática entre los campos de velocidad y de vorticidad permite formular la ecuación potencial vectorial de Poisson (Wu y Thomson, 1973) y cuya solución es la integral de Biot-Savart, Ec. (3).

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} d\mathbf{r}_0. \quad (3)$$

3. MÉTODO DE RED DE VÓRTICES INESTACIONARIO Y PARTÍCULAS VORTICOSAS

En el método híbrido, existe un aporte a la solución de la ecuación de Poisson, que por su carácter lineal, proviene en parte de paneles vorticosos y en parte de partículas vorticosas. El UVLM-VPM es un método híbrido en el que los paneles vorticosos que pasan a formar parte de la estela son convertidos en partículas. La evolución temporal material de las partículas, tanto en posición como en vorticidad, permiten definir de manera unívoca el campo de movimiento (Ribero et al., 2023).

El campo de velocidad es aproximado por un campo de velocidad discreto, $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$, que deriva del modelo de vorticidad discreta, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}, t)$.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \approx \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_\infty + \left[\sum_{s=1}^{n_s} \tilde{\mathbf{u}}_\delta^s + \sum_{p=1}^{n_p} \tilde{\mathbf{u}}_\sigma^p \right], \quad (4a)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{u} \approx \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}, t) = \left[\sum_{s=1}^{n_s} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\delta^s + \sum_{p=1}^{n_p} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_\sigma^p \right], \quad (4b)$$

donde, \mathbf{u}_∞ es la velocidad de la corriente libre, $\tilde{\mathbf{u}}_\delta^s(\mathbf{r}, t)$ es la velocidad asociada al segmento s , $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_\delta^s(\mathbf{r}, t)$ es la vorticidad del segmento s , n_s es el número de segmentos, $\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^p(\mathbf{r}, t)$ es la velocidad asociada a la partícula p , $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_\sigma^p(\mathbf{r}, t)$ es la vorticidad de la partícula p , y n_p es el número de partículas.

El cambio de posición y de vorticidad de cada partícula está dado por

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_p(t) = \tilde{\mathbf{u}}|_{\mathbf{r}_p} \quad (5a)$$

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\alpha}_p(t) = \left[\nabla^t \tilde{\mathbf{u}}|_{\mathbf{r}_p} \right] \boldsymbol{\alpha}_p, \quad (5b)$$

El esquema transpuesto se prefiere en el modelado de flujo no viscoso por tener la propiedad de conservar la vorticidad total de las partículas (Cottet y Koumoutsakos, 2000). Las Ec. (5a) y la Ec. (5b) se resuelven de manera discreta en el tiempo.

3.1. Segmento vorticoso recto de longitud finita

Un segmento vorticoso recto singular ($\delta = 0$), de longitud finita y circulación constante, es la forma de filamento vorticoso que se utiliza en el método de red de vórtices inestacionario (UVLM). La ley de Biot-Savart especializada para un segmento vorticoso de longitud finita está dada por (Preidikman, 1998)

$$\tilde{\mathbf{u}}^s(\mathbf{r}, t) = \frac{\Gamma^s}{4\pi} \frac{\mathbf{L}^s \times \mathbf{r}_1^s}{\|\mathbf{L}^s \times \mathbf{r}_1^s\|_2^2} \mathbf{L}^s \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1^s - \hat{\mathbf{e}}_2^s), \quad (6)$$

donde, Γ^s es la circulación del segmento s , $\|\cdot\|_2$ es la norma 2 de un vector, $\hat{\mathbf{e}}_1^s(\mathbf{r}, t)$ es el versor del vector posición \mathbf{r}_1^s , $\hat{\mathbf{e}}_2^s(\mathbf{r}, t)$ es el versor del vector posición \mathbf{r}_2^s , $\mathbf{r}_1^s = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i^s$ es el vector posición entre el punto de evaluación \mathbf{r} , y el vector posición del origen del segmento \mathbf{r}_i^s , y $\mathbf{r}_2^s = \mathbf{r} - \mathbf{r}_f^s$ es el vector posición entre el punto de evaluación, \mathbf{r} , y el vector posición del final del segmento, \mathbf{r}_f^s , y $\mathbf{L}^s = \mathbf{r}_1^s - \mathbf{r}_2^s$ es el segmento de recta vectorial que define al segmento vorticoso.

3.2. Partícula vorticosas con núcleo regularizado

Una partícula vorticosas con núcleo regularizado es un tipo de partícula en el que la singularidad ha sido removida por alguna función de regularizado o suavizado. En este trabajo se utiliza un regularizado de alto orden (Winckelmans y Leonard, 1993). La ley de Biot-Savart especializada para una partícula de este tipo, está dada por

$$\tilde{\mathbf{u}}_\sigma^p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\|\mathbf{r}_1^p\|_2^2 + \frac{5}{2}\sigma_p^2}{(\|\mathbf{r}_1^p\|_2^2 + \sigma_p^2)^{5/2}} \boldsymbol{\alpha}_p \times \mathbf{r}_1^p, \quad (7)$$

donde, $\mathbf{r}_1^p(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_p$, es el vector posición entre el punto de evaluación \mathbf{r} , y la posición de la partícula $\mathbf{r}_p(t)$, $\boldsymbol{\alpha}_p(t)$ es el vector intensidad de la partícula, y σ_p es el radio de la burbuja de suavizado. A fin de asegurar la convergencia del método, σ_p debe contener al menos a una partícula vecina, es decir, si d es la distancia entre dos partículas vecinas, se debe cumplir la relación de superposición,

$$\kappa = \frac{\sigma_p}{d} \geq 1. \quad (8)$$

El campo de vorticidad, $\overline{\boldsymbol{\omega}}_\sigma^p$, modelado por una partícula vorticosas, está dado por

$$\overline{\boldsymbol{\omega}}_\sigma^p(\mathbf{r}, t) = -\nabla^2 \tilde{\boldsymbol{\psi}}_\sigma^p = \boldsymbol{\alpha}_p \zeta_\sigma^p, \quad \zeta_\sigma^p(\mathbf{r}, \sigma_p) = \frac{15}{8\pi} \frac{\sigma_p^4}{(\|\mathbf{r}_1^p\|_2^2 + \sigma_p^2)^{7/2}}, \quad (9)$$

donde, $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_\sigma^p$, es el potencial vectorial de la partícula, $\zeta_\sigma^p(\mathbf{r}, \sigma_p)$, es la función de suavizado algebraico de alto orden. El campo de vorticidad que se reconstruye a partir del campo de velocidad muestra la siguiente discrepancia

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_\sigma^p - \overline{\boldsymbol{\omega}}_\sigma^p = \nabla \left[\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}}_\sigma^p \right]. \quad (10)$$

En otros términos, la Ec. (10) muestra que el campo potencial vectorial no es libre de divergencia y, por lo tanto, no se satisfacen la primera y la segunda ley de Helmholtz de la vorticidad (Cottet y Koumoutsakos, 2000). Independientemente de la forma en la que evoluciona, un filamento en un flujo no viscoso e incompresible siempre debe formar una curva cerrada sobre sí mismo (anillo) o debe tener sus extremos en la superficie que limita al dominio. El término de lado derecho de la Ec. (10) se puede interpretar como el aporte de vorticidad necesario para que se cumplan las leyes de Helmholtz.

3.3. Filtrado de divergencia del campo de vorticidad

El método de filtrado de divergencia es un esquema de relajación del campo de vorticidad propuesto por Pedrizzetti (Pedrizzetti, 1991). Este método ha mostrado resultados satisfactorios, aunque no está demostrada su consistencia con la física del problema. En cada paso de tiempo, la intensidad de vorticidad de la partícula es modificada utilizando el filtro lineal,

$$\alpha_p^n = (1 - \xi) \alpha_p + \xi \|\alpha_p\| \hat{e}_{\tilde{\omega}}, \quad \hat{e}_{\tilde{\omega}}(\mathbf{r}_p) = \frac{\tilde{\omega}}{\|\tilde{\omega}\|} \Big|_{\mathbf{r}_p}, \quad (11)$$

donde, α_p^n , es el vector intensidad de la partícula p luego de aplicar el filtrado, $\tilde{\omega} = \sum_{p=1}^{n_p} \tilde{\omega}_\sigma^p$ y $\hat{e}_{\tilde{\omega}}$ es el versor local del campo de vorticidad libre de divergencia. En la Fig. 1 se muestra un esquema del filtro de Pedrizzetti en la que se grafica el mecanismo de reorientación y re-intensificación de vector α_p en función del factor $\xi = f \Delta t$, siendo $\alpha_p^n = \|\alpha_p\| \hat{e}_\alpha$ si $\xi = 0$ y $\alpha_p^n = \|\alpha_p\| \hat{e}_{\tilde{\omega}}$ si $\xi = 1$.

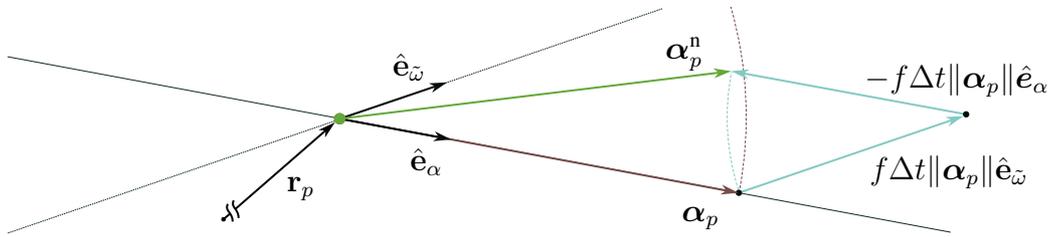


Figura 1: Filtro lineal de Pedrizzetti

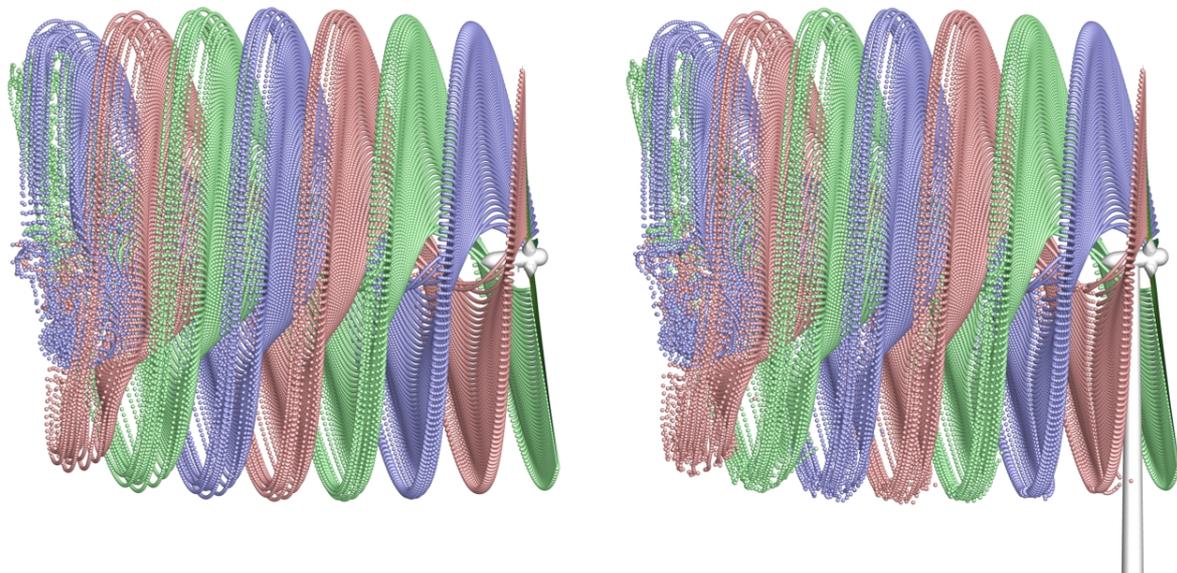
4. RESULTADOS

4.1. Ventajas de la incorporación de partículas vorticosas: La turbina de eje horizontal y gran potencia (LHAWT)

La turbina que se presenta es una turbina eólica de referencia DTU 10-MW (Bak et al., 2013). Se presentan los resultados para una configuración de rotor y góndola, y para una configuración de turbina completa compuesta por el rotor, la góndola y la torre. La cinemática del rotor, de 180,73 m de diámetro, está dada por velocidad angular de 9,6 rpm. La malla que modela la geometría de la turbina, las posiciones y velocidades se obtuvieron con el software UVLMeshGen (Roccia et al., 2024).

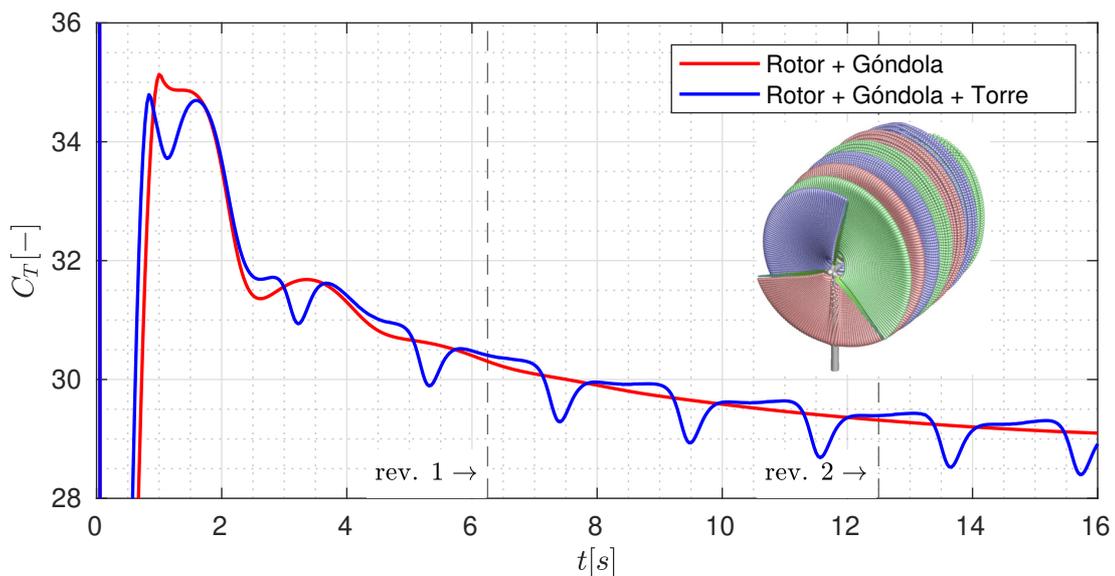
En las Fig. 2a y 2b se muestran las estelas de la turbina para cada configuración luego de 500 pasos de simulación con un tiempo característico de 0,032 s. En la Fig. 2c se grafica la curva de coeficiente de fuerza, $C_T(t)$, integrado sobre las tres palas y proyectados en la dirección de la corriente libre. Además, se identifican los instantes de tiempo para la primera y segunda revolución del rotor. Como parte de la observación, hasta los 4 s la influencia del sistema de vórtices de arranque es elevada. Luego de ese tiempo, se observa que el $C_T(t)$ comienza a estabilizarse, mostrando una tendencia a un valor estacionario de sustentación.

La implementación del método en este tipo de aplicaciones muestra con claridad la ventaja de poseer una solución libre de malla. Las partículas pueden fluir por el contorno delimitado por la torre mostrando la fuerte influencia que genera en la predicción de la carga aerodinámica. Para el modelo de rotor, góndola y torre, se observan tres valles que se relacionan con el paso de la pala frente a la torre. Naturalmente, cuando se modela el rotor de forma aislada, no aparecen los valles en la curva de fuerza.



(a) Rotor + Góndola

(b) Rotor + Góndola + Torre



(c) Componente del coeficiente de fuerza del rotor en la dirección de la corriente libre.

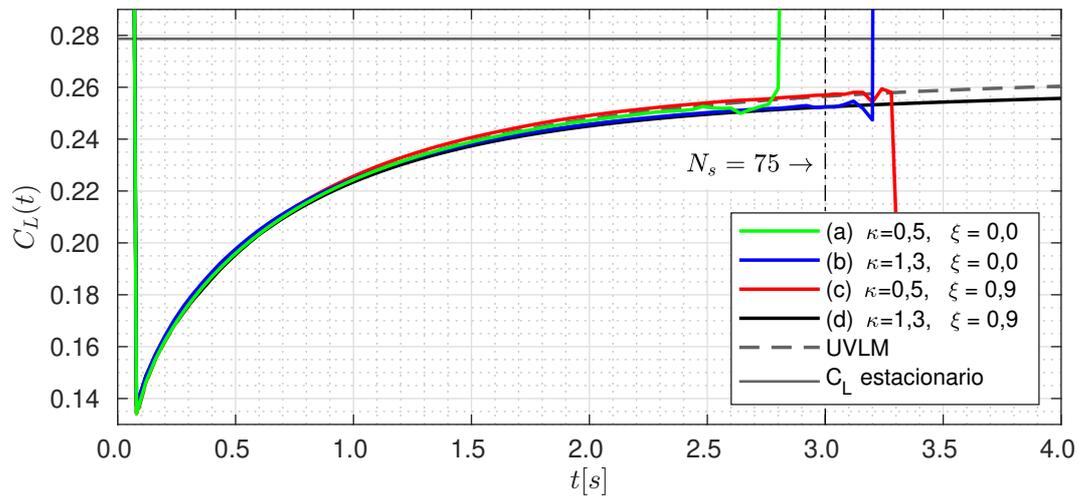
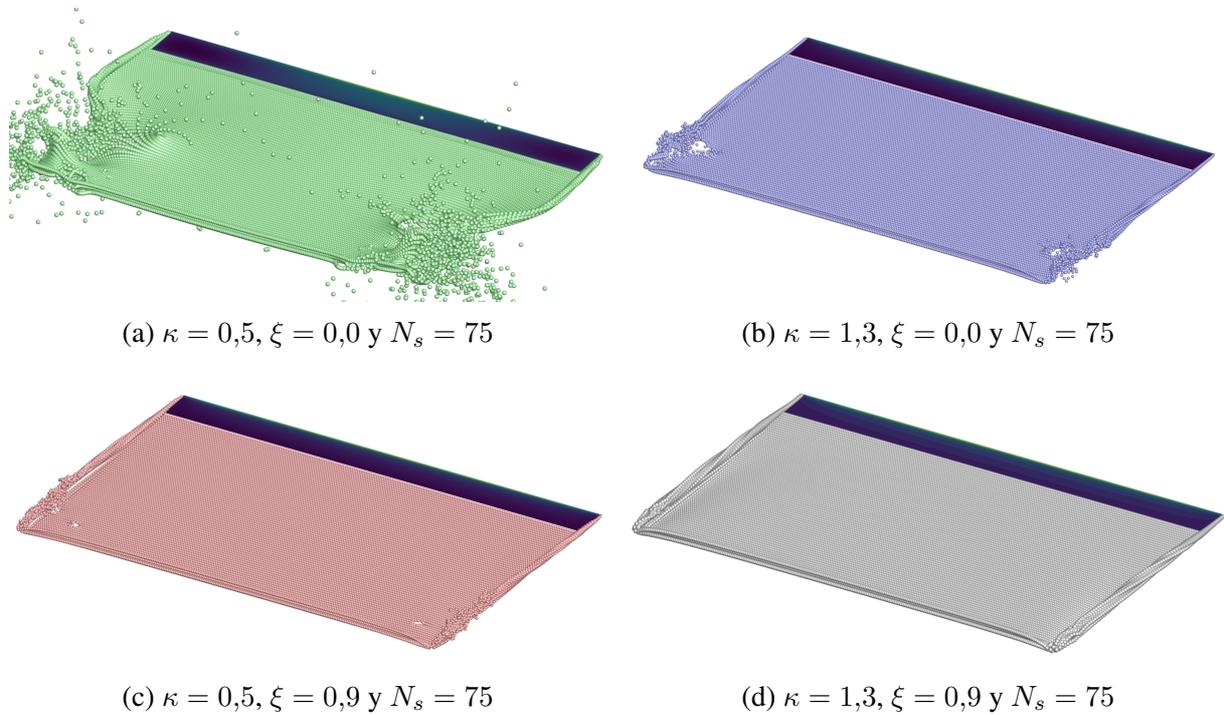
Figura 2: Modelo de UVLM-VPM para la turbina DTU 10 MW.

En la Fig. 2b se puede observar la interrupción de la estela que se produce por la presencia de la torre. En términos generales, la captura del campo de movimiento no evidencia un comportamiento de las estelas que sea sustancialmente diferente, salvo en la zona que se ve afectada por la presencia de la torre.

4.2. Limitaciones y desafíos: La placa plana

La placa plana es un modelo ampliamente estudiado de manera teórica y experimental. Por consiguiente, es un modelo que permite analizar los parámetros de modelado del UVLM-VPM con un grado de certidumbre mayor sobre los fenómenos de inestabilidad que muestra el método.

A los efectos de resaltar las limitaciones, se muestra en la Fig. 3, un conjunto de cuatro combinaciones del parámetro de suavizado, κ , y del parámetro de filtrado, ξ . El parámetro de suavizado: menor y mayor al estrictamente necesario, $\kappa = 1$, y el parámetro de filtrado es nulo y 0,9.



(e) Coeficiente de sustentación no estacionario para diferentes parámetros de modelado.

Figura 3: Placa plana de AR=12, AoA = 3° con diferentes parámetros de modelado. La línea de convección está formada por el borde de fuga y las punteras.

La placa plana tiene 12 m envergadura y 1 m de cuerda, esto es, tiene una relación de aspecto AR = 12. La discretización de la placa se posee 240 paneles en la dirección de la envergadura, 20 paneles en la dirección de cuerda y una distancia, $d = 0,05$ m, equivalente al lado de un

panel. La línea de convección de la estela se forma por el borde de fuga y las punteras de la placa. El ángulo de ataque geométrico es de 3° con respecto a la corriente libre de $2,5 \text{ m/s}$, el paso de tiempo discreto $0,04 \text{ s}$ y 100 pasos de tiempo de simulación.

En las Fig. 3a, 3b, 3c y 3d se muestra una captura del campo de movimiento a los 75 pasos de tiempo de simulación y se indican los parámetros de modelado. Adicionalmente, en la Fig. 3e se muestra la curva del coeficiente de sustentación, $C_L(t)$ para cada una de estas combinaciones, la comparación con la curva obtenida por el UVLM y el valor del coeficiente de sustentación estacionario teórico que se obtiene por medio de la aproximación de Helmbold (Helmbold, 1942).

La Fig. 3e tiene especial relevancia, ya que representa, además de la sustentación de la placa, un indicador de la estabilidad (o inestabilidad) del modelo. Esta inestabilidad se manifiesta con un grado de irregularidad o falta de suavidad al comienzo en las curvas de sustentación (a), (b) y (c), luego se inestabiliza de forma brusca. En estas tres configuraciones, al menos uno de los parámetros de la simulación, no cumple con las condiciones necesarias para dotar al método de estabilidad.

La configuración propuesta para la curva (d) muestra un comportamiento, hasta el tiempo simulado, estable. El valor de $C_L(t)$ se mantiene cercano al modelo de UVLM, entendiendo esto como algo positivo, dada la robustez del UVLM. Para la curva (c) se observa una superposición marcada con respecto al UVLM. Esto se explica rápidamente por el bajo valor de suavizado y una fuerte reorientación del campo de vorticidad. Las dos combinaciones restantes dan como resultado valores intermedios entre los límites mencionados.

5. CONCLUSIÓN

En este trabajo se han presentado las ventajas y limitaciones de un enfoque híbrido de red de vórtices no estacionaria combinado con partículas vorticosas (UVLM-VPM). Se ha demostrado que la incorporación de este método permite simular de manera más precisa y eficiente aplicaciones complejas, como el flujo alrededor de turbinas eólicas de gran potencia. En particular, el uso de un método libre de malla facilita la representación de interacciones aerodinámicas, como las causadas por la presencia de una torre, que influyen en la predicción de la carga aerodinámica.

Sin embargo, también se ha destacado la importancia de ajustar adecuadamente ciertos parámetros críticos, como el suavizado y el filtrado, para asegurar la estabilidad y confiabilidad del modelo. Las simulaciones en la placa plana revelaron que la elección incorrecta de estos parámetros puede generar inestabilidades significativas, lo que pone de relieve la necesidad de calibración cuidadosa.

En resumen, aunque el método UVLM-VPM presenta claras ventajas en términos de flexibilidad y precisión, su implementación exitosa depende de la adecuada parametrización y control de las condiciones de estabilidad. Las perspectivas futuras sugieren que este enfoque tiene un amplio potencial para mejorar la simulación de flujos dominados por vorticidad en diversas aplicaciones aerodinámicas.

REFERENCIAS

- Alvarez E.J. y Ning A. Reviving the vortex particle method: A stable formulation for meshless large eddy simulation. *Arxiv*, 2206.03658, 2022.
- Bak C., Zahle F., Bitsche R., Kim T., Yde A., Henriksen L., Hansen M., Blasques J., Gaunaa M.,

- y Natarajan A. The dtu 10-mw reference wind turbine. 2013. Danish Wind Power Research 2013 ; Conference date: 27-05-2013 Through 28-05-2013.
- Cottet G.H. y Koumoutsakos P.D. *Vortex Methods: Theory and Practice*. Cambridge University Press, 2000.
- Drela M. *Flight Vehicle Aerodynamics*. The MIT Press, 2014.
- Helmbold H. Der unverwundene ellipsenflügel als tragende flanche. *Jahrbuch*, páginas I111–I113, 1942.
- Mimeau C. y Mortazavi I. A review of vortex methods and their applications: From creation to recent advances. *Fluids*, 2021. doi:10.3390/fluids6020068.
- Pedrizzetti G. Insight into singular vortex flows. *Fluid Dynamics Research*, 10:101–115, 1991.
- Preidikman S. Numerical simulations of interactions among aerodynamics, structural dynamics, and control systems. *Virginia Tech*, 1998.
- Pérez Segura M.E. *Implementación Computacional del Método de Red de Vórtices Inestacionario: Una Versión Basada en los Paradigmas de Programación Orientada a Objetos y Co-Simulación*. Universidad Nacional de Córdoba, 2018.
- Ribero S., Pérez Segura M.E., Aichino A., Beltramo E., Rocca B.A., y Preidikman S. Un método de red de vórtices inestacionario modificado utilizando partículas vorticosas para simulaciones aerodinámicas. parte i: Formulación matemática. *Mecánica Computacional*, 15:1005–1014, 2023.
- Rocca B.A., Ceballos L.R., Verstraete M.L., y Gebhardt C.G. Development and application of a mesh generator intended for unsteady vortex-lattice method simulations of wind turbines and wind farms. *Wind Energy Science*, 9(2):385–416, 2024. doi:10.5194/wes-9-385-2024.
- Winckelmans G.S. y Leonard A. Contributions to vortex particle methods for the computation of three-dimensional incompressible unsteady flows. *Journal of computational physics*, 109:247–273, 1993.
- Wu J.C. y Thomson J.F. Numerical solutions of time-dependent incompressible navier-stokes equations using an integro-differential formulation. *Computers & Fluids*, 1:197–215, 1973.