

## ESTUDIOS ANALÍTICOS Y EXPERIMENTALES DE RECOLECTORES DE ENERGÍA PIEZOELÉCTRICOS DE GEOMETRÍA CIRCULAR: ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE GRANDES ACELERACIONES PARA DIFERENTES FRECUENCIAS

### ANALYTICAL AND EXPERIMENTAL STUDIES OF CIRCULAR PIEZOELECTRIC ENERGY HARVESTERS: ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF LARGE ACCELERATIONS AT DIFFERENT FREQUENCIES

Carlos Vera<sup>a</sup>, Mariano Febbo<sup>b</sup>, Sebastián Machado<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada (GIMAP), Universidad Tecnológica Nacional  
Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, B8000, [gimap@frbb.utn.edu.ar](mailto:gimap@frbb.utn.edu.ar),  
<https://www.frbb.utn.edu.ar/>

<sup>b</sup>Instituto de Física del Sur (IFISUR), Universidad Nacional del Sur (UNS), CONICET, Av. Alem 1253  
B8000 Bahía Blanca, Argentina, [ifisur@uns.edu.ar](mailto:ifisur@uns.edu.ar), <http://www.ifisur-conicet.gov.ar/>

**Palabras clave:** Recolección de energía, piezoelectricidad, vibraciones.

**Resumen.** Los recolectores de energía piezoeléctricos de geometría circular, conocidos como buzzer, son estudiados cada vez con mayor interés, dada su versatilidad mecánica y bajo costo en comparación a recolectores con otras geometrías. En el presente artículo se presenta un modelo analítico unidimensional mejorado para simular la generación de voltaje obtenida a partir de un recolector de energía que utiliza un material piezoeléctrico tipo “buzzer”. El objetivo principal del artículo es presentar una nueva formulación no lineal que permita analizar la influencia de grandes aceleraciones sobre el comportamiento del recolector de energía. Los resultados obtenidos con el modelo matemático, lineal y no lineal son comparados con ensayos experimentales en laboratorio. La frecuencia de resonancia para máxima generación es cercana a los 140 Hz, donde la sintonización se logra mediante el diseño de una masa central que permite flexibilizar el dispositivo recolector.

**Keywords:** Energy harvesting, piezoelectricity, vibration.

**Abstract.** Circular piezoelectric energy harvesters, known as buzzers, are increasingly being studied due to their mechanical versatility and low cost compared to harvesters with other geometries. This paper presents an improved one-dimensional analytical model to simulate the voltage generation obtained from an energy harvester using a buzzer-type piezoelectric material. The main objective of the paper is to analyze the influence of high accelerations on the behavior of the energy harvester. The results obtained with the linear and non-linear mathematical model are compared with experimental tests in the laboratory. The resonance frequency for maximum generation is close to 140 Hz, where tuning is achieved by designing a central mass that allows the harvesting device to be flexible.

## 1 INTRODUCCIÓN

Los recolectores de energía piezoeléctricos, cuya fuente de energía proviene de fuentes vibratorias, son estudiados cada vez con mayor interés por ser una tecnología que resuelve el abastecimiento de estaciones autónomas de sensado, con un significativo ahorro de costos de manutención (Sodano et. al 2004, Erturk et. al 2009, Kim et. al 2011). En particular, los recolectores tipo buzzer, de configuración circular, presentan una amplia versatilidad de usos en dispositivos de almacenamiento de energía provenientes de fuentes vibratorias (Zhou et. al 2014; Yang Y et. al 2018). Estos se construyen a través de la unión de dos discos de diferente diámetro, uno de latón (sustrato) sobre el cual se monta otro de diámetro menor y de PZT. El bajo costo de mercado de los buzzer, en comparación con piezoeléctrico tipo viga, hacen que su elección sea una posibilidad óptima en rangos similares de generación deseada.

En trabajos anteriores, los autores del presente (Vera et. al 2022; Vera et. al 2023) han realizado estudios experimentales y computacionales con buzzers, comparando las diferentes respuestas que se obtienen modificando las condiciones de vinculación. En particular, un modelo analítico unidimensional con una masa de oscilación (Chen et. al. 20214) permite sintonizar la frecuencia del recolector para un rango particular. El modelo parte de la teoría clásica lineal de vibraciones de placas circulares (Reddy et. al. 2006) y no toma en consideración efectos no lineales. Estos efectos son importantes al momento de analizar el comportamiento vibratorio de placas, principalmente en resonancia (Sathayamoorthy M. 1987; Amabily M. 2008) por lo que el estudio de no linealidades va ganando terreno en el estudio de resonadores.

Los efectos no lineales en los dispositivos pueden responder a distintos enfoques, entre los que se destacan los geométricos (Mak et. al. 2012), elásticos (Joshi, 1992) y de acoplamiento electromecánico (Abdelkefi et. al. 2012).

En el presente trabajo, se desarrolla un nuevo modelo no lineal para placas circulares a partir de la incorporación de términos de orden superior en las ecuaciones de tensiones radiales y transversales para el material piezoeléctrico y también para el desplazamiento eléctrico (Machado et. al. 2016; Gatti et. al. 2016). La incorporación de estos efectos permite derivar un sistema de ecuaciones electromecánicas no lineales mediante las ecuaciones de Lagrange, que se resuelven analíticamente. Como resultado se obtiene un modelo que propone el dimensionamiento del dispositivo de manera más completa, sobre todo para la recolección de energía en ambientes donde predominan altas aceleraciones, mayores a 0.2g generalmente, que es la finalidad de uso del modelo del dispositivo.

En cuanto a su comportamiento mecánico, el modelo incorpora el efecto de amortiguamiento del tipo Rayleigh y también un coeficiente de amortiguamiento no lineal, la parte piezoeléctrica del se caracteriza mediante la inclusión de coeficientes de acoplamiento piezoeléctrico lineales y no lineales, capacidad interna e impedancias correspondientes (Stanton et. al. 2010).

Los resultados del modelo analítico son contrastados con experimentos de laboratorio para diferentes valores de excitación, en rangos que van desde 0,1g a 1g, sintonizados los experimentos a la frecuencia de resonancia del orden de los 140 Hz.

La motivación del modelo analítico no lineal propuesto es la de optimizar el dispositivo recolector de energía de geometría circular, con un bajo costo computacional, de manera de poder incorporarlo como dispositivo de recolección de energía en estaciones de sensado autónomo de máquinas agrícolas (Febbo et. al. 2022).

## 2 MODELO DEL RECOLECTOR

### 2.1 Geometría

El esquema del prototipo se muestra en la Figura 1 a). El mismo consta de un disco circular de latón y un disco PZT-5H. El latón está empotrado a lo largo de toda su circunferencia y sobre el PZT se coloca una masa de oscilación.

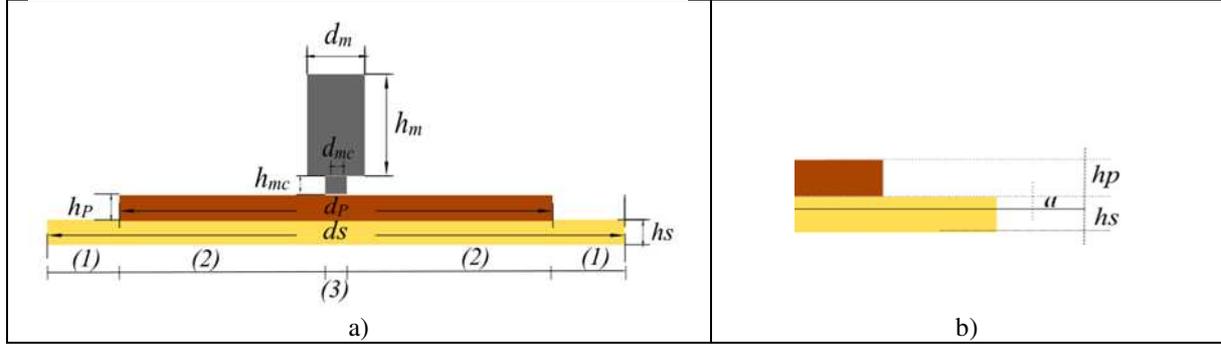


Figura 1a) y b): Esquema del recolector.

Un sistema de coordenadas  $(r, \theta, z)$  se localiza tal que el plano neutro coincida con el plano  $(r, \theta)$ , mientras que el origen del sistema coincide con el centro del dispositivo, con el eje  $z$  hacia arriba. Las dimensiones geométricas en corte transversal del dispositivo son el diámetro y el espesor del sustrato  $(d_s, h_s)$ , diámetro y espesor del PZT  $(d_p, h_p)$ , diámetro  $(d_m)$  y altura  $(h_m)$  de la masa de oscilación. El contacto entre masa y PZT se materializa montando M sobre cilindros de menor diámetro  $(d_{mc})$  y de altura constante  $(h_{mc})$ , siendo  $d_{mc}$  quien define esta área. Se define como “ $a$ ” a la distancia entre el eje neutro y la cota superior “ $h_s$ ”, Figura 1 b).

### 2.2 Modelo analítico

Asumiendo que la deflexión del prototipo no es lo suficientemente grande, se utiliza la teoría clásica de placas de Kirchoff en la que para un desplazamiento flexional  $w = w(r, \theta, t)$  se definen el desplazamiento radial  $u_r$  y el desplazamiento transversal  $u_\theta$  como

$$u_r = -z \frac{\partial w}{\partial r}; \quad u_\theta = -\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (1)$$

en tanto que las deformaciones específicas quedan como

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} = -\frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial r}; \quad \gamma_{r\theta} = 0 \quad (2)$$

Mediante la Ley de Hooke se obtienen tensiones radiales y transversales para el sustrato (S) y para el piezoeléctrico (p) (Yuanlin et al. 2017). Para el sustrato se propone

$$\sigma_r^{(S)} = \frac{E_S}{(1-\nu_S^2)} (\varepsilon_r + \nu_S \varepsilon_\theta); \quad \sigma_\theta^{(S)} = \frac{E_S}{(1-\nu_S^2)} (\varepsilon_\theta + \nu_S \varepsilon_r) \quad (3)$$

en las que  $E_S, \nu_S$  son el módulo de Young y el módulo de Poisson respectivamente.

Para el piezoeléctrico, considerando expresiones de no linealidad de la constitutiva del material (Leadenham et al, 2015) se tiene

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(p)} &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_p^2)}(\varepsilon_r + \nu_p \varepsilon_\theta) - \frac{e_{31}}{s_{11}^E(1-\nu_p)} E_3 + \frac{1}{s_{111}^E(1-\nu_p^2)} [\varepsilon_r^2 + \nu_p \varepsilon_\theta \varepsilon_r] \text{sign}(\varepsilon_r) \\
&\quad - \frac{e_{311}}{s_{111}^E(1-\nu_p^2)} (1 + \nu_p) \varepsilon_r \text{sign}(\varepsilon_r) E_3 \\
\sigma_\theta^{(p)} &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_p^2)}(\varepsilon_p + \nu_p \varepsilon_\theta) - \frac{e_{31}}{s_{11}^E(1-\nu_p)} E_3 + \frac{1}{s_{111}^E(1-\nu_p^2)} [\varepsilon_\theta^2 + \nu_p \varepsilon_\theta \varepsilon_r] \text{sign}(\varepsilon_\theta) \\
&\quad - \frac{e_{311}}{s_{111}^E(1-\nu_p^2)} (1 + \nu_p) \varepsilon_\theta \text{sign}(\varepsilon_\theta) E_3
\end{aligned} \tag{4}$$

en las que  $s_{11}^E$  y  $\nu_p$  son la flexibilidad elástica del material piezoeléctrico a campo eléctrico constante y el módulo de Poisson del piezoeléctrico respectivamente. Los términos asociados a la no linealidad constitutiva  $s_{111}^E$  y  $e_{311}$ , son el módulo de elasticidad no lineal y la constante piezoeléctrica no lineal respectivamente.

### 2.3 Formulación variacional

Las ecuaciones electromecánicas acopladas que gobiernan la dinámica del recolector se derivan a través de las ecuaciones de Lagrange. Se presenta la deducción de la energía potencial  $U$  (de deformación y del potencial eléctrico) y cinética  $T$  del sistema.

En el caso de  $U$  esta se considera la suma de la energía del sustrato ( $U_S$ ) y del piezoeléctrico ( $U_p$ ). Para el sustrato se tiene

$$U_S = \int_{V_s} \frac{1}{2} \{ \varepsilon_r \sigma_r^{(S)} + \varepsilon_\theta \sigma_\theta^{(S)} \} dV_s + NL_G \tag{5}$$

donde  $NL_G$  representa la no linealidad geométrica, que en este caso se considera en forma aproximada según (Haterbouch et. al. 2003).

$$NL_G = \pi D \int_0^r \frac{3}{h^2} (w')^4 r dr \tag{6}$$

Para el piezoeléctrico, incorporando la energía del potencial eléctrico, queda

$$U_p = \int_{V_p} \frac{1}{2} \{ \varepsilon_r \sigma_r + \varepsilon_\theta \sigma_\theta \} dV_p - \int_{V_p} D_3 E_3 dV \tag{7}$$

Notar que  $D_3$  es la componente del desplazamiento eléctrico definida por

$$D_3 = d_{13} (\sigma_r^{(p)} + \sigma_\theta^{(p)}) + \varepsilon_{33}^T E_3 + \frac{e_{311}}{s_{11}^E(1-\nu_p)} \varepsilon_r \tag{8}$$

donde  $\varepsilon_{33}^T$  es la permitividad del piezoeléctrico a tensión constante,  $d_{13}$  constante piezoeléctrica y  $E_3$  campo eléctrico en la dirección  $z$  positivo, que se obtiene según (Erturk et. al. 2011)

$$E_3 = -\frac{V_t}{h_p} \tag{9}$$

El desplazamiento es definido para 3 secciones de acuerdo con los materiales que componen el dispositivo,  $w = w(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^3 w_i(r, \theta, t)$ . La sección (1) corresponde al sustrato  $S$ , la (2) a la del piezoeléctrico  $p$  y la (3) a la de la masa oscilante. De esta manera, la energía cinética  $T$  se calcula mediante la integral

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_3} \rho_M [\dot{w}_3(r, \theta, t)]^2 dV_3 + \frac{1}{2} \int_{V_p} \rho_p [\dot{w}_2(r, \theta, t)]^2 dV_p + \frac{1}{2} \int_{V_s} \rho_s [\dot{w}_1(r, \theta, t)]^2 dV_s + \frac{1}{2} m_t \dot{g}^2 \quad (10)$$

en la que  $\rho_p$ ,  $\rho_s$  y  $\rho_M$  son las densidades por unidad lineal del piezoeléctrico, del sustrato y de la masa oscilante.

Reemplazando las Ec. (3) y (4) en las Ec. (5), (7) y (10) se obtiene el operador de Lagrange  $L=T-U$ . Aplicando el principio de Hamilton se derivan las ecuaciones del movimiento

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial L}{\partial w'} \right) - \frac{\partial}{\partial r^2} \left( \frac{\partial L}{\partial w''} \right) + c\dot{w} + c\dot{w}^2 \text{sign}(\dot{w}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial V} \right) + \frac{V}{R_L} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Donde los últimos dos términos corresponden al trabajo de las fuerzas no conservativas. Uno de ellos es debido a la disipación viscosa estructural lineal del buzzer y el otro término debido a la disipación no lineal según (Stanton et. al. 2010).

Finalmente, a partir del desarrollo de la Ec. (11) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} M\ddot{w} + K\nabla^4 w - EI_{n\theta} w' [w' - rw''] \text{sign}(w') + \\ EI_{nr} \left[ (6 + 2\nu_p) w'' w'''' + 3r (w'''' )^2 + (\nu_p w' + 3rw'') w'''' \right] \text{sign}(w'') \\ - J_{pn\theta} \nu [w' - rw''] \text{sign}(w') - J_p [w' + rw''] - J_{pnr} \nu [2w'' + rw'''' ] \\ - \frac{12D_s \pi w' [w' + 3rw'']}{12} = -M_g \ddot{g}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$C_p \nu + \frac{\nu}{R_L} + J_p [\dot{w}'' + r\dot{w}'''] + J_{pnr} r\dot{w}'' \text{sign}(w'') + J_{pn\theta} r w' \dot{w}' \text{sign}(w') = 0$$

en las que quedan definidas las expresiones

$$\begin{aligned} D_s = \frac{E_s h_s^3}{12(1-\nu_s^2)}; \quad K = 2\pi r \left[ D_s + \frac{E_s h_s (3a^2 - 3ah_s + h_s^2)}{3(1-\nu_s^2)} + \frac{h_p (3a^2 - 3ah_p + h_p^2)}{3S_{11p} (1-\nu_p^2)} \right]; \\ EI_{n\theta} = \frac{h_p (4a^3 + 6a^2 h_p + 4ah_p^2 + h_p^3) \pi (3 + \nu_p)}{2r^3 S_{11p\theta} (1-\nu_p^2)}; \quad M = 2\pi r \rho_A; \\ EI_{nr} = \frac{h_p (4a^3 + 6a^2 h_p + 4ah_p^2 + h_p^3) \pi}{2S_{11pr} (1-\nu_p^2)}; \quad M_{ai} = \rho_i A_i \int_r \phi_i(r) dr \\ J_p = 2\pi \frac{d_{31}}{S_{11p} (1-\nu_p)} \frac{(2ah_p + h_p^2)}{2h_p}; \quad J_{pn\theta} = \frac{e_{311\theta} \pi}{r^2 (1-\nu_p)} (-3a^2 - 3ah_p - h_p^2); \\ J_{pnr} = \frac{e_{311r} \pi}{(1-\nu_p)} (-3a^2 - 3ah_p - h_p^2) \end{aligned} \quad (13)$$

En (13) se destacan términos de rigidez no lineal piezoeléctrica  $EI_{nr}$  y  $EI_{n\theta}$ , de acoplamiento electromecánico no lineal  $J_{pnr}$  y  $J_{pn\theta}$ . En tanto que  $D_s$  es el conocido coeficiente de rigidez de

placa circular,  $M$  la masa,  $K$  la rigidez lineal del sistema  $M_{ai}$  la masa forzante y  $C_p$  la capacidad. El desplazamiento  $w(r, \theta, t) = w(r, t)$  por simetría, y se discretiza como

$$w(r, t) = \sum_{k=1}^3 \phi_{(k),n}(r) q(t) \quad (14)$$

en la que  $\phi_{(k),n}(r)$  son los  $n$  modos normales de vibración de cada sección ( $i$ ) y  $q(t)$  es el desplazamiento temporal. Los modos se determinan a través de la teoría de vibraciones flexionales de placas circulares (Vera et. al. 2023), donde la solución general es

$$w_{(i)}(r) = A_i J_0(\beta_i r) + B_i Y_0(\beta_i r) + C_i I_0(\beta_i r) + D_i K_0(\beta_i r); \quad i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

en las que  $J_0(\beta_i r)$ ,  $Y_0(\beta_i r)$  son las funciones de Bessel de 1° y 2° especie de orden cero, mientras  $I_0(\beta_i r)$ ,  $K_0(\beta_i r)$  son sus versiones modificadas.

La normalización de los modos  $\hat{\phi}_{(k),n}(r)$  respecto de la masa para cada sección del recolector se calcula a través de la integral

$$1 = 2\pi \left[ \int_{r_1}^{r_2} m_1 \phi_1^2(r) r dr + \int_{r_2}^{r_3} m_2 \phi_2^2(r) r dr + \int_0^{r_3} m_3 \phi_3^2(r) r dr \right] \quad (16)$$

en la que  $m_{(i)}$  es la masa asociada a cada sección del dispositivo. Finalmente, normalizando (12) se llega al sistema de ecuaciones diferenciales gobernantes del problema

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) + \xi \dot{q}(t) - KNq^2(t) \text{sign}[q(t)] - v(t)\theta_p - \theta_{pn}v(t)q(t) \text{sign}(q) \\ - KGq^3(t) + C_n \dot{q}(t) \text{sign}[\dot{q}(t)] = -\rho A \ddot{g} \quad (17) \\ \frac{v(t)}{R_L} + 2\pi r \frac{\epsilon_{33}}{h_p} v(t) + \theta_p \dot{q}(t) + \psi_{pn} \dot{q}(t) q(t) \text{sign}[q(t)] = 0 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \int K\phi(r) \left[ \frac{1}{r^3} \phi'(r) - \frac{1}{r^2} \phi''(r) + \frac{2}{r} \phi'''(r) + \phi^{IV}(r) \right] dr; \\ KG &= \frac{12\pi D_s}{h^2} \int \phi(r) \phi'^2(r) [\phi'(r) + 3\phi''(r)] dr; \\ KN &= \int EI_{n\theta} \phi(r) [\phi'(r) - r\phi''(r)] \text{sign}(\phi'(r)) dr + \\ &\int EI_{nr} \phi(r) [(6 + 2\nu_p) \phi''(r) \phi'''(r) + 3r\phi^{m2}(r) + (\nu_p \phi'(r) + 3r\phi''(r)) \phi^{IV}(r)] \text{sign}(\phi''(r)) dr; \\ \theta_p &= \int J_p (\phi'(r) + r\phi''(r)) dr; \\ \theta_{pn} &= \int [J_{pnr} (2\phi''' + r\phi^{IV}) \text{sign}(\phi''(r)) + J_{pn\theta} (\phi' - r\phi'') \text{sign}(\phi''(r))] dr; \\ C_n &= \int \phi(r)^3 2\xi_n \omega \text{sign}(\phi(r)) dr; \\ \psi_{pn} &= \int [J_{pnr} r\phi''^2(r) \text{sign}(\phi''(r)) + J_{pn\theta} r\phi'(r) \text{sign}(\phi'(r))] dr. \end{aligned} \quad (18)$$

en la que  $KG$  es la rigidez no lineal geométrica,  $KN$  la rigidez no lineal constitutiva,  $C_n$  el amortiguamiento no lineal,  $\theta_p$  acoplamiento no lineal geométrico,  $\theta_{pn}$  es el acoplamiento no

lineal constitutivo mecánico,  $\psi_{pn}$  acoplamiento no lineal eléctrico,  $\omega$  es la rigidez normalizada del dispositivo, integradas todas en el segmento de  $w_{(i)}$  que corresponda ( $i=1, 2, 3$ ).

### 3 RESULTADOS

Se realizaron comparaciones entre los modelos analíticos con experimentos en laboratorio. En la Tabla 1 figuran las dimensiones geométricas del dispositivo (Figura 2) y los valores mecánicos y eléctricos. En todos los casos se realizó un barrido en frecuencia entre 130 Hz y 170 Hz, con valores de excitación en unidades de  $g = 9.80 \text{ m/s}^2$  a saber: 0.1g, 0.2g, 0.5g y 1.0g, para valores de resistencia  $R = 9.1 \text{ k}\Omega$ , amortiguamiento lineal  $\xi = 0.1$ , y no lineal  $\xi_{NL} = 0.016$

$d_m$	13.25 mm	$d_s$	36 mm	$E_s$	97 GPa	$S_{11}^E$	62.3GPa
$h_m$	7 mm	$h_s$	0.1 mm	$\rho_s$	7850 kg/cm <sup>3</sup>	$\rho_p$	7500 kg/cm <sup>3</sup>
$d_{mc}$	6 mm	$d_p$	23.5 mm	$\nu_s$	0.31	$d_{31}$	125 10 <sup>-12</sup> C/m <sup>2</sup>
$h_{mc}$	6 mm	$h_p$	0.1 mm	$C_p$	8.15 10 <sup>-15</sup> Fa	$S_{111}^E$	-2.685 10 <sup>-12</sup> 1/Pa

Tabla 1 a), b) Dimensiones geométricas, valores mecánicos y eléctricos del dispositivo

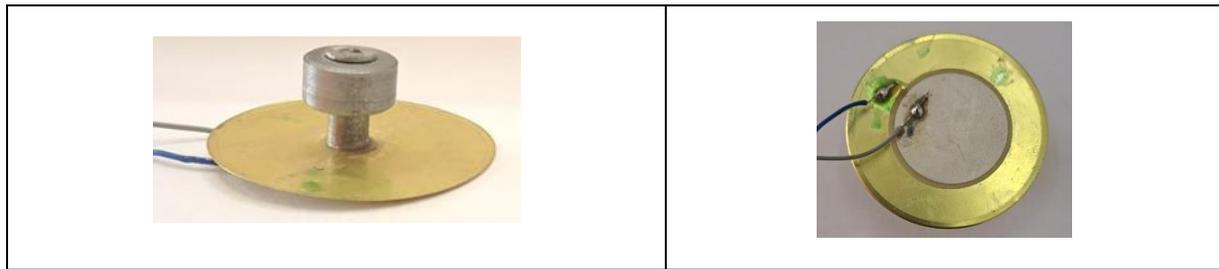


Figura 2. Dispositivo recolector



Figura 3. Esquema de ensayo en laboratorio.

La señal de entrada para los experimentos se realiza mediante un generador de ondas Rigol DG4062, que se amplifica para ingresar a un shaker Labworks ET-132. La respuesta es medida por un acelerómetro PCB Piezotronics (sensibilidad de 98.7 mV/g). La señal de salida es adquirida por una placa National Instruments NI 9234 y postprocesada mediante un código generado en Matlab. La configuración del ensayo se puede observar en la Figura 3.

Las Figuras 4 (a, b, c y d) muestran curvas de generación de los modelos lineal, no lineal y experimental para cada valor de excitación. El modelo lineal se obtiene haciendo cero todos los parámetros no lineales en la formulación.

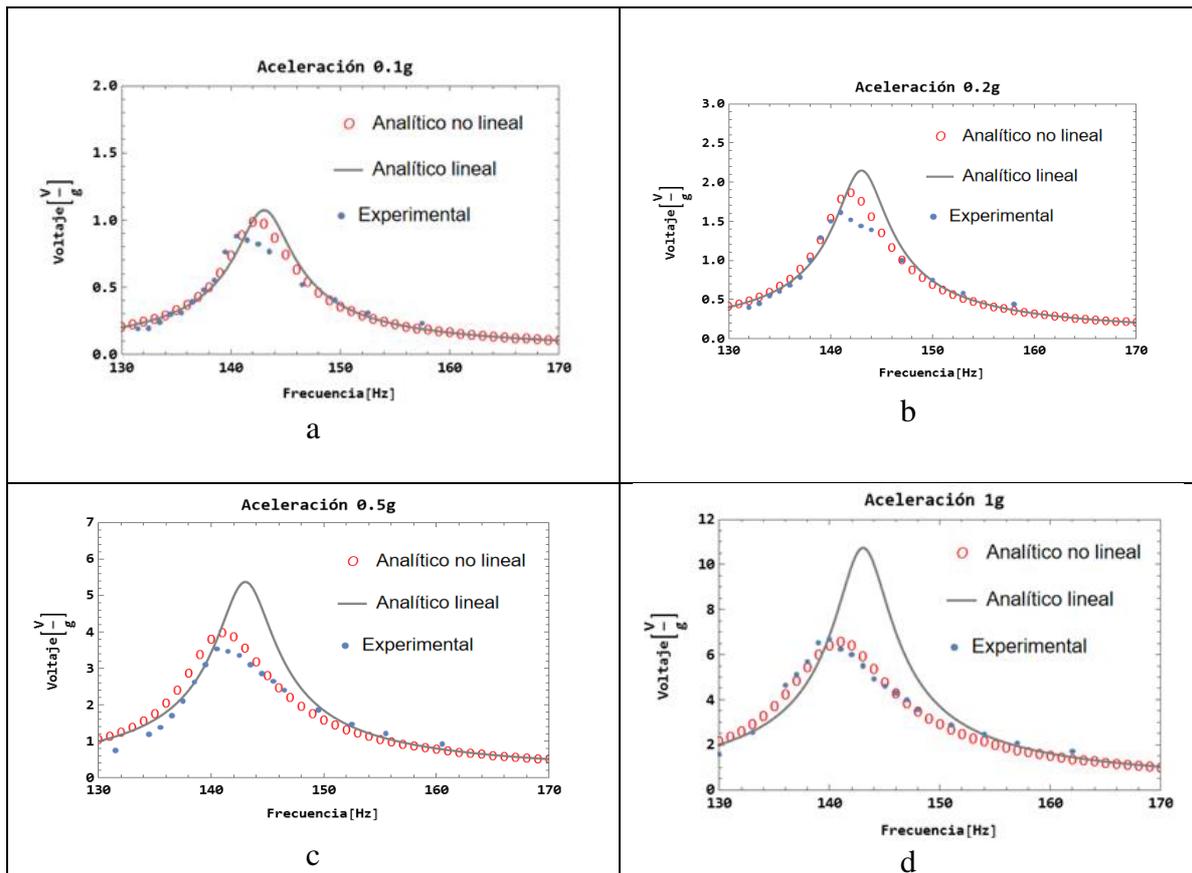


Figura 4 a), b), c), d). Generación modelos lineal, no lineal y experimental

Como puede observarse en la Figuras 4 a) y 4 b), como es de esperar no se observa la influencia de los términos no lineales debido a las bajas aceleraciones. De esta manera, hay una buena predicción de la generación para ambos modelos (lineal y no lineal) con los resultados experimentales. Sin embargo, cuando la aceleración aumenta aparecen 2 efectos distintivos. Por un lado, el modelo lineal arroja valores superiores de generación tanto a los no lineales como a los experimentales, siendo esta discrepancia mayor para el caso de 1g de excitación. La buena predicción del modelo no lineal se debe principalmente a la disipación no viscosa definida en la Ec. (11) que actúa como amortiguamiento. El segundo efecto que se observa en las Figuras (4 c y 4 d), conocido como softening, es un corrimiento en la frecuencia de resonancia hacia la izquierda. Este efecto se debe principalmente al término constitutivo no lineal  $S_{111}^E$ .

## 4 DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Es conocido que los modelos lineales presentan limitaciones a la hora de predecir la generación de energía cuando los recolectores son sometidos a altas aceleraciones. Es por tal motivo que en este artículo se presenta un nuevo modelo no lineal placas circulares que es capaz de predecir correctamente la recolección de energía para diferentes niveles de aceleración. En el modelo se incluyen términos de orden superior en las tensiones radiales y transversales para el material piezoeléctrico y también para el desplazamiento eléctrico. Esta inclusión es una mejora del modelo analítico lineal propuesto por los autores en trabajos anteriores. Para validar el modelo, se contrastaron estos valores de generación de energía con los obtenidos de manera experimental en laboratorio, para diferentes niveles de excitación.

En los casos de bajas aceleraciones, las predicciones de generación de voltaje tienen una buena aproximación para ambos modelos respecto de los resultados experimentales. Esta situación se da en cercanías a la frecuencia de resonancia y fuera de resonancia, siendo esto último de gran importancia. En cambio, para altas aceleraciones se evidencian desfases en frecuencia y en los valores de generación entre ambos modelos analíticos. En este caso, Figuras 4 c) y 4 d), la diferencia en generación entre el modelo lineal y el no lineal ronda los 1.35 Volts y los 4.3 Volts respectivamente. No obstante, se mantiene la concordancia en generación entre el modelo no lineal y los valores experimentales. Esta buena predicción del modelo no lineal se debe principalmente al término de disipación viscosa no lineal definido en la Ec. (11). Observando las Fig. (4 a) y (4 b) la generación para 0.1g y para 0.2g pareciera que no se ve afectada por los efectos no lineales, siendo para el 1° caso del orden de 1 Volt y para el 2° caso del orden de los 2 Volts. El efecto softening también se acrecienta a medida que aumenta el valor de la excitación, llegando el corrimiento a valores cercanos a los 2 Hz. para el caso de bajas aceleraciones y altas aceleraciones.

Como síntesis del trabajo se infiere que el modelo no lineal de generación de energía se ajusta muy bien tanto para bajas aceleraciones como para altas aceleraciones. En particular, para bajas aceleraciones converge de idéntica manera con las predicciones del modelo lineal. La consideración de efectos no lineales como los del presente trabajo son de gran importancia en situaciones de altas aceleraciones, situación que se estima sean las condiciones de trabajo del recolector de energía, propiamente en maquinarias agrícolas.

Se propone como futuro trabajo, verificar la convergencia del modelo no lineal propuesto para mayores aceleraciones a 1g.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Facultad Regional Bahía Blanca - Universidad Tecnológica Nacional; a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y a la Comisión de Investigaciones Científicas (CIC) de la Provincia de Buenos Aires.

## REFERENCIAS

- Abdelkefi A, Nayfeh A, and Hajj M. "Effects of nonlinear piezoelectric coupling on energy harvesters under direct excitation," *Nonlinear Dynamics*, vol. 67, pp. 1221-1232, 2012.
- Amabili, M. *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University Press. United Kingdom, 2008.
- Chen X R, Yang T Q, Wang W and Yao X. Vibration energy harvesting with a clamped piezoelectric circular diaphragm. *Ceram. Int.* 38 S271-4, 2012.

- Erturk A. and Inman D. J. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. *Smart Materials and Structures*, 18(2), 2009.
- Erturk A. and Inman D. J. Piezoelectric Energy Harvesting. Wiley, Chichester, United Kingdom, 2011.
- Febbo M, Machado SP. Recolector piezoeléctrico para unidad de sensado autónomo de fuego, *MECOM 2022*, págs. 871-880, Bahía Blanca, Argentina, 2022.
- Gatti C. D, Ramirez J. M, Machado S. P y Febbo M. Influencia de relaciones constitutivas no lineales en la recolección piezoeléctrica de energía. *MECOM 2016*, págs. 3047 - 3063, Córdoba, Argentina, 2016.
- Haterbouch M., Benamar R. The effects of large vibration amplitudes on the axisymmetric mode shapes and natural frequencies of clamped thin isotropic circular plates. Part I: iterative and explicit analytical solution for non-linear transverse vibration. *Journal of Sound and Vibration*. 265 – (123 – 154). 2003
- Joshi S. J. Non-linear constitutive relations for piezoceramic materials. *Smart Materials and Structures*. Vol. 1, p. 80, 1992.
- Kim H. S., Kim J. K. A review of piezoelectric energy harvesting based on vibration. *Int. J. Prec. Eng. Manuf.* 12 – 1129 – 1141. 2011.
- Leadnham S. and Erturk, A. Unified nonlinear electroelastic dynamics of a bimorph piezoelectric cantilever for energy harvesting, sensing, and actuation. *Nonlinear Dynamics*. Vol. 79, pp. 1727-1743, 2015.
- Li H D, Tian C and Deng Z D. Energy harverting from low frequency applicattions using piezoelectric materials. *App. Phys. Rev.* 1 20. 2014.
- Machado, S.P, Gatti, C.D., Ramirez, and Febbo, M., Influence of nonlinear constitutive relations in unimorphs piezoelectric harvesters. *Journal of Physics: Conference Series*, 773.012093, 2016.
- Mak K. H. Popov A. A, and McWilliam S. "Experimental model validation for a nonlinear energy harvester incorporating a bump stop," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, pp. 2602-2623, 2012.
- Reddy J. N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. (Boca Raton, FL: CRC Press), 2006.
- Sathyamoorthy M. Nonlinear Vibration Analysis of Plates: Review and survey of current developments. *Applied Mechanics Reviews*, 40 (11), 1553 – 1561, 1987.
- Sodano H. A., Inman D. J. and Park G. A review of power Harvesting from vibration using piezoelectric materials. *Shock Vib. Dig.* 36. 197-206, **2004**.
- Stanton S. C, Erturk A, Mann B. P, and Inman D. J. "Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters: Modeling and experimental identification," *Journal of Applied Physics*, vol. 108, p. 074903, 2010.
- Vera C, Febbo M, Machado S. Estudios paramétricos de un recolector de energía que utiliza piezoeléctricos de geometría circular. *MECOM 2022*, págs. 921-930 Bahía Blanca, Argentina, 2022.
- Vera C, Febbo M, Machado S. Un modelo analítico para el estudio de recolectores de energía piezoeléctricos de geometría circular con condiciones de vinculación particulares. *MECOM 2023*, págs. 731 – 740 Concordia, Argentina, 2023
- Yang Y., Li Y., Guo Y., Xu B. -X and Yang T. Improved vibration-based energy harvesting by annular mass configuration of piezoelectric circular diaphragms. *Smart Materials Structure*. 27, 2018, 035004 (9pp), 2018.

Yuanlin Hu, Xin Liang and Wen Wang. A theoretical solution of resonant circular diaphragm-type piezoactuators with added mass loads. *Sensors and Actuators A: Physical*. A 258 74-87. 2017

Zhou J L, Deng L C and Wen Z Y. A vibration-based MEMS piezoelectric energy harvester and power conditioning circuit. *Sensors*. 14 3323-41.2014