

## EXTRACCIÓN DE ENERGÍA UNDIMOTRIZ: EXPLORANDO EL POTENCIAL DEL PÉNDULO Y LOS MOTORES DE PULSO

### WAVE ENERGY EXTRACTION: EXPLORING THE POTENTIAL OF THE PENDULUM AND PULSE MOTORS

Juan N. Virla<sup>a,b</sup>, Lisandro. Rojas<sup>a,b</sup>, Lucas. Oxarango<sup>a,b</sup> y Franco E. Dotti<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Grupo de Investigación en Multifísica Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de Abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, [gimap@frbb.utn.edu.ar](mailto:gimap@frbb.utn.edu.ar).*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

**Palabras clave:** Energía undimotriz, péndulo físico, dinámica no lineal, motores de pulso.

**Resumen.** Esta investigación explora la aplicación de motores de pulsos para controlar un péndulo de masas múltiples, o N-péndulo, bajo forzamiento paramétrico que modela el oleaje marino. El N-péndulo, una alternativa más práctica al péndulo simple para la generación eléctrica impulsada por olas, exhibe una dinámica no lineal con un comportamiento estacionario fuertemente influenciado por las condiciones iniciales. Un par de motores de pulsos, posicionados simétricamente respecto a la posición de reposo del péndulo y modelados mediante elementos finitos, generan un par útil incluso desde el reposo, alterando las cuencas de atracción rotacionales. El estudio se centra en cómo los motores de pulso cambian estas cuencas para diferentes condiciones de forzamiento, con el objetivo de aumentar el rango de condiciones iniciales que conducen a rotaciones en estado estacionario.

**Keywords:** wave energy, physical pendulum, non-linear dynamics, pulse motors

**Abstract.** This research explores the application of pulse motors to control a multi-mass pendulum, or N-pendulum, under parametric forcing that models marine waves. The N-pendulum, a more practical alternative to the simple pendulum for wave-driven electrical generation, exhibits non-linear dynamics with stationary behaviour heavily influenced by initial conditions. A pair of pulse motors, symmetrically positioned with respect to the pendulum's rest position and modeled using finite elements methods, generate a useful torque even from rest, altering the rotational basins of attraction. The study focuses on how the pulse motors change these basins under different forcing conditions, with the aim of increasing the range of initial conditions leading to steady-state rotations.

## 1. INTRODUCCIÓN

El constante incremento en la demanda energética a nivel global ha impulsado la exploración y desarrollo de nuevas formas de generación de energía. Entre estas, el péndulo ha emergido como una alternativa interesante debido a su aparente simplicidad constructiva. Sin embargo, su naturaleza no lineal le permite exhibir comportamientos complejos, incluyendo respuestas caóticas, oscilaciones y rotaciones, siendo estas últimas las de interés en el presente estudio.

El poder del oleaje marino se manifiesta de manera casi permanente, constituyendo un recurso energético significativo. Estudios han estimado que el potencial global del oleaje alcanza aproximadamente 1 teravatio a lo largo de las costas mundiales, con una densidad de energía promedio de 2-3 kW/m<sup>2</sup> en el área perpendicular a la dirección de propagación de las olas [Falnes \(2007\)](#).

Investigaciones previas sobre la dinámica del péndulo indican la existencia de un umbral en la amplitud de forzamiento por debajo del cual las rotaciones no son factibles [Clifford y Bishop \(1995\)](#); [Garira y Bishop \(2003\)](#). Esto subraya la necesidad de un diseño meticuloso que sitúe al péndulo, de forma natural, dentro de la región de forzamiento donde las rotaciones predominan como solución estable.

Incluso cuando el forzamiento permite la ocurrencia de rotaciones, estas coexisten con otros tipos de respuestas, y el movimiento resultante del péndulo está altamente influenciado por las condiciones iniciales. Diversas estrategias han sido propuestas para controlar y favorecer tipos específicos de respuesta; entre ellas, destaca el uso de un péndulo controlado magnéticamente [Kraftmakher \(2007\)](#). Este enfoque ofrece una solución elegante y versátil, permitiendo la aplicación de un torque de control sin necesidad de acoplamiento mecánico directo, lo que evita la introducción de términos de amortiguamiento adicionales al sistema.

En el presente trabajo se estudia el efecto de implementar una acción de control mediante un torque magnético en un péndulo de masas múltiples sometido a un forzamiento externo periódico. Se analizan y comparan las cuencas de atracción del sistema bajo diversas condiciones de forzamiento, tanto con como sin la aplicación del control magnético. Además, se evalúa la capacidad del sistema para alcanzar soluciones rotatorias al usar diferentes velocidades máximas de accionamiento del control.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

El diagrama de un péndulo magnético de cuatro masas contenido en el plano  $xy$  se muestra en la figura 1. Una rueda estructural brinda rigidez a la disposición de las masas, separadas a distancias iguales, y se colocan cuatro imanes en su circunferencia de modo que estos coinciden con el brazo de cada masa. Los imanes pueden interactuar con dos bobinas fijas produciendo una fuerza repulsiva  $F_t$  tangente a la rueda, a medida que el péndulo rota alrededor de su pivote  $O$ , describiendo mediante un ángulo  $\theta$  el desplazamiento del centro de masa  $CM$  respecto a la posición de reposo. Un forzamiento periódico es aplicado en  $O$ , con función  $Y(t) = H\cos(\Omega t)$  donde  $H$  y  $\Omega$  se eligen convenientemente.

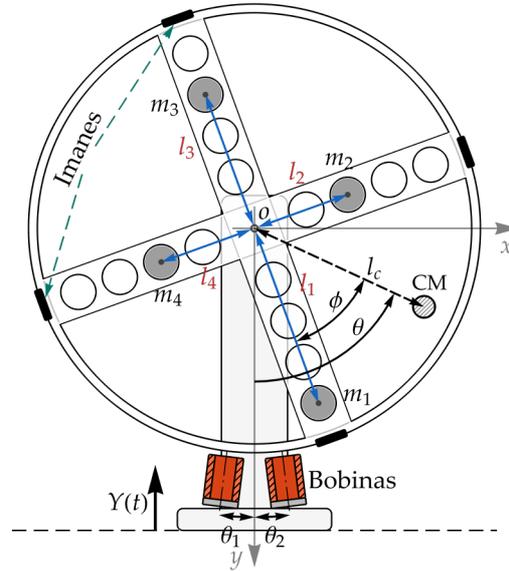


Figura 1: 4-péndulo magnético con forzamiento externo

A cada brazo pendular se le asigna una masa  $m_i$  y longitud  $l_i$ , denotando al brazo principal mediante  $m_1$  y  $l_1$  como aquel con el mayor producto  $m_i l_i$  y que desarrolla el ángulo  $\phi$  con el centro de masa, y cuyas coordenadas están dadas por

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^4 m_i l_i \sin[\theta - \phi + (i - 1) \frac{\pi}{4}], \\ y_c &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^4 m_i l_i \cos[\theta - \phi + (i - 1) \frac{\pi}{4}], \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $M = \sum_{i=1}^4 m_i$  es la masa total del péndulo cuando se desprecia el efecto de la rueda de soporte y los imanes en la dinámica del dispositivo. Al considerar un término de disipación viscosa  $c$  derivado de la función de disipación de Rayleigh e incluir un torque  $b \operatorname{sgn} \dot{\theta}$  asociado a la fricción seca, la ecuación de movimiento del péndulo con el torque magnético de control representado por la función  $\tau_{ac} = F_t(\theta) \nu(\theta, \dot{\theta})$  tiene la forma

$$I_0 \ddot{\theta} + b \operatorname{sgn} \dot{\theta} + c \left( \frac{l_1 m_1 - l_3 m_3}{M} \right)^2 \dot{\theta} + (g - H \Omega^2 \cos(\Omega t)) (l_1 m_1 - l_3 m_3) \operatorname{sen} \theta = \tau_{ac}, \quad (2)$$

con  $I_0$  correspondiendo a la inercia del péndulo. Al considerar  $l_2 = l_4$  y  $m_2 = m_4$  se obtiene una configuración simétrica que resulta en  $\phi = 0$ , esto es, que el centro de masa se encuentra sobre el brazo de  $m_1$ . La función  $\nu(\theta, \dot{\theta})$  corresponde a la función de activación y se desarrolla más adelante.

Los parámetros de amortiguamiento  $b$  y  $c$  se determinan experimentalmente para un prototipo de laboratorio, siguiendo el método desarrollado en Horton et al. (2007). Al resolver la ecuación 2 linealizada y ajustada para decaimiento libre, se obtienen las expresiones

$$T_r = \omega_0^2 \frac{|\theta_1||\theta_{i-1}| - |\theta_0||\theta_i|}{|\theta_1| + |\theta_0| - |\theta_{i-1}| - |\theta_i|}, \quad (3)$$

$$c = \frac{2\hat{\delta}I_0\omega_0}{\sqrt{\pi^2 + \hat{\delta}^2}}; \text{ con } \hat{\delta} = \frac{1}{(i-1)\pi} \ln \left( \frac{|\theta_0| - |\theta_1|}{|\theta_{i-1}| - |\theta_i|} \right). \quad (4)$$

Aquí  $\omega_0$  representa la frecuencia natural sin amortiguar del péndulo, y en estas expresiones  $\theta_i$  es el  $i$ -ésimo pico de oscilación correspondiente al medio ciclo  $i + 1$  del decaimiento para ángulos menores a  $\pi/18$ . El conjunto  $P_H = (b_H, c_H)$  obtenido experimentalmente con este método es utilizado como punto de referencia, y se aplica el método de mínimo error cuadrático medio (o MMSE por sus siglas en inglés) entre la solución numérica de 2 y una serie de ensayos de decaimiento experimentales para evaluar el espacio de parámetros  $(b, c)$  alrededor de  $P_H$  y obtener un conjunto representativo de los ensayos completos. El método del mínimo error cuadrático medio se determina a evaluando

$$S_M(b, c) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N_j} \left[ \theta_i^{(j)} - \hat{\theta}_i^{(j)} \right]^2, \quad (5)$$

donde  $m$  es el número de ensayos a comparar, y  $N_j$  es el número de datos de cada ensayo. Esto permite obtener una medida del ajuste de las respuestas de la ecuación de movimiento a los experimentos realizados para cada conjunto de términos de amortiguamiento. El conjunto con el menor resultado corresponde al de mejor ajuste, y se lo denomina  $P_M = (b_M, c_M)$ , obteniéndose para el prototipo  $b = 2,543 \times 10^{-4} \text{ N m}$  y  $c = 6,455 \times 10^{-5} \text{ N s/m}$ .

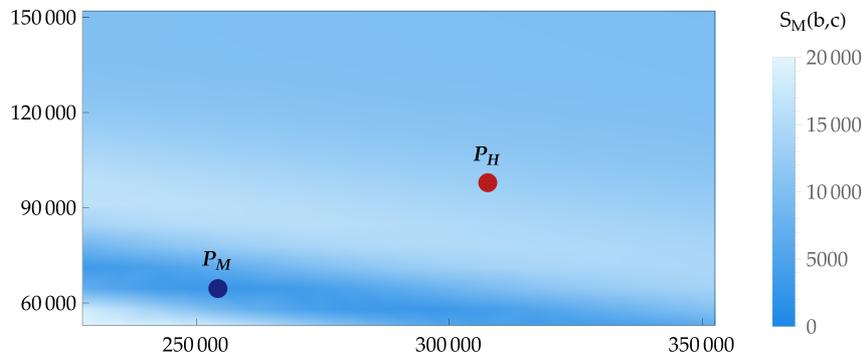


Figura 2: Espacio de parámetros  $(b, c)$  de amortiguamiento.  $P_H$  indica el conjunto de parámetros hallado mediante las ecuaciones 3 y 4, mientras que  $P_M$  es aquel obtenido por el método de MMSE.

## 2.1. Fuerza electromagnética

La fuerza entre la bobina y el imán fue obtenida mediante un análisis electromagnético espacial de elementos finitos, implementado como un modelo convencional en el software ANSYS. La fuerza de Lorentz de interacción entre bobina e imán se obtuvo para ángulos incrementales de  $\theta$ , de modo que esta fuera repulsiva y limitando el rango de estudio a la región donde la fuerza supera un valor mínimo. De este modo, la fuerza fue determinada para el rango  $0 \leq \theta \leq \pi/12$ , y mediante una transformación geométrica se obtuvo la fuerza tangencial sobre el imán, siendo esta la que interviene en la energía cinética del péndulo.

Dada la simetría del conjunto bobina-imán, la fuerza tangencial es simétrica respecto al eje de revolución de la bobina. Alrededor de  $\pi/18$  se encontró que la fuerza tangencial deja de ser repulsiva, como se muestra en la figura 3, por lo que el rango efectivo de la fuerza se acota entre  $-\pi/20$  y  $\pi/20$ , y se ajustan los datos numéricos mediante una serie de Fourier, expresada en la ecuación 6 como

$$F_t(\theta) = 33815 (1 + 0,28\cos(18\theta) - 0,65\cos(36\theta) - 0,12\cos(54\theta) - 0,08\cos(72\theta)). \quad (6)$$

Los valores obtenidos mediante el modelo de elementos finitos muestran que  $F_t$  es nula cuando  $\theta = 0$ , y la bobina ejerce solamente fuerza en la dirección radial del péndulo, impidiendo que el péndulo escape de esta posición. Para sortear este problema, se propone el uso dos bobinas desplazadas en ángulos  $\theta_1 = -\theta_2$  desde la posición de equilibrio del péndulo, como se ilustra en la figura 1, ambas con una corriente tal que la fuerza resultante sea repulsiva, y buscando que la acción de control permita el escape del péndulo desde desde su posición de reposo.

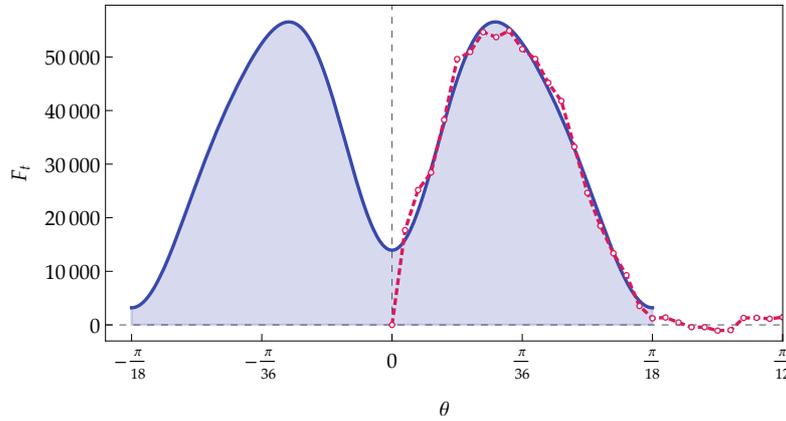


Figura 3: Fuerza electromagnética  $F_t$  como función de la posición angular del péndulo.

## 2.2. Acción de control

La función de activación se denomina  $\nu_{ac}$  y depende de  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ . Los límites de activación dependientes de  $\theta$  surgen naturalmente de  $F_t$  con ángulos de activación y desactivación  $\theta_{act}$  y  $\theta_{des}$  que se asignan en una función  $\mathcal{H}_1$ . La dependencia de  $\dot{\theta}$  está dada en  $\mathcal{H}_2$  a través de una velocidad máxima descrita en Butikov (1999) como aquella que permite que el péndulo llegue desde  $\theta = -\pi$  hasta  $\theta = \pi$  con velocidad nula, y cuya expresión es  $\dot{\theta}_B = 4\sqrt{(c\omega_0 + b)/I_0}$  con un valor para la configuración en estudio de  $\dot{\theta}_B = 9,838$  rad/s .

Una última condición de activación  $\mathcal{H}_3$  condiciona que la activación de las bobinas se de solamente cuando el signo de  $\theta$  sea igual al de  $\dot{\theta}$ . Esto responde a que si el péndulo está en una posición dada y su velocidad es tal que el imán se acerca a la bobina, la fuerza repulsiva  $F_t$  actuaría disminuyendo la energía cinética del péndulo.  $\mathcal{H}_3$  cumple aquí la función de permitir la acción de control actúe solamente aumentando la energía cinética.

$$\mathcal{H}_1(\theta) = \begin{cases} 0, & |\theta| > \theta_{act} \\ 1, & \theta_{des} \leq |\theta| \leq \theta_{act} \\ 0, & |\theta| < \theta_{des} \end{cases}, \quad \mathcal{H}_2(\dot{\theta}) = \begin{cases} 1, & |\dot{\theta}| \leq \dot{\theta}_B \\ 0, & |\dot{\theta}| \geq \dot{\theta}_B \end{cases},$$

$$\mathcal{H}_3(\theta, \theta') = \begin{cases} 1, & \text{sgn}\theta = \text{sgn}\dot{\theta} \\ 0, & \text{sgn}\theta \neq \text{sgn}\dot{\theta} \end{cases}.$$

Dado que las bobinas están desplazadas, a las ecuaciones  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_3$  de cada bobina se les aplican la transformación  $\theta \rightarrow \theta + \theta_i$ , donde  $\theta_i$  es el desplazamiento de cada bobina respecto a la posición de reposo. Esto permite definir nuevas ecuaciones  $\mathcal{H}_{1i}$  y  $\mathcal{H}_{3i}$ , cuyo fin es evitar el accionamiento simultaneo de ambas bobinas extendiendo el límite derecho de acción de la bobina izquierda de modo que contenga a  $\theta = 0$  y retrayendo en la misma medida el límite izquierdo de la bobina derecha. Al aplicar estas definiciones, la ecuación que modela la acción de las bobinas sobre el péndulo tiene la forma

$$\tau_{ac}(\theta, \dot{\theta}) = F_t(\theta) l_m * \left[ \mathcal{H}_{11}(\theta) \mathcal{H}_2(\dot{\theta}) \mathcal{H}_{31}(\theta, \dot{\theta}) + \mathcal{H}_{12}(\theta) \mathcal{H}_2(\dot{\theta}) \mathcal{H}_{32}(\theta, \dot{\theta}) \right]. \quad (7)$$

### 3. RESULTADOS

Dada la no linealidad del sistema, con excepción de la posición de reposo estable es poco factible definir a priori las condiciones iniciales del péndulo. Esto motivó a realizar un estudio de la influencia que tiene la acción de control sobre el péndulo cuando las condiciones iniciales son aleatorias.

La evaluación numérica de la ecuación 2 bajo el forzamiento externo  $Y(t) = H \cos(\Omega t)$ , permitió construir el espacio de parámetros  $(\Omega, H)$  con las probabilidades de obtener rotaciones para el péndulo sin acción de control, mostrado en la figura 4. Se identificaron en ella tres regiones de interés denotadas mediante las letras *a*, *b* y *c*, distinguiéndose además las conocidas regiones de rotaciones del péndulo, de manera similar a los diagramas mostrados en Clifford y Bishop (1995), siendo la región *a* aquella donde las respuestas posibles son el reposo u oscilaciones, mientras que en las regiones *b* y *c* las rotaciones son posibles, y son las más beneficiadas por la acción de control.

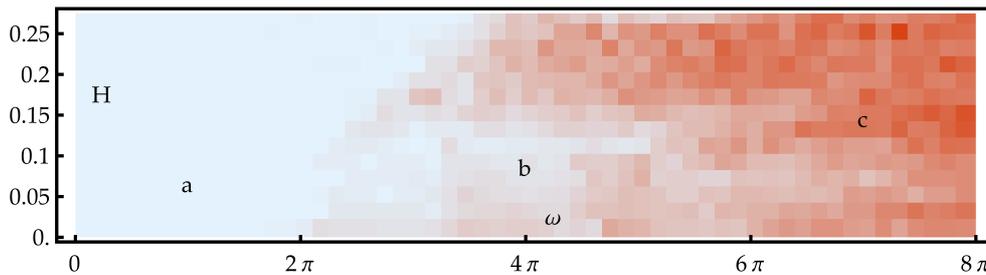


Figura 4: Espacio de parámetros  $(\Omega, H)$  medidos en (rad/s, m) para el péndulo sin acción de control. Tres regiones quedan claramente definidas en función de las probabilidades de obtener rotaciones con condiciones iniciales aleatorias.

Las frecuencias  $\Omega = \pi$  rad/s,  $\Omega = 4\pi$  rad/s y  $\Omega = 7\pi$  rad/s se identificaron como aquellas de mayor interés para estudiar el efecto de la acción de control. Se halló que en base a la limitación de la velocidad máxima de accionamiento  $\dot{\Theta}_B$ , en la región *a* las respuestas cambiaban desde el reposo a oscilaciones debidas a la acción de control, mientras que el aumento de soluciones rotantes era evidente para las regiones *b* y *c*.

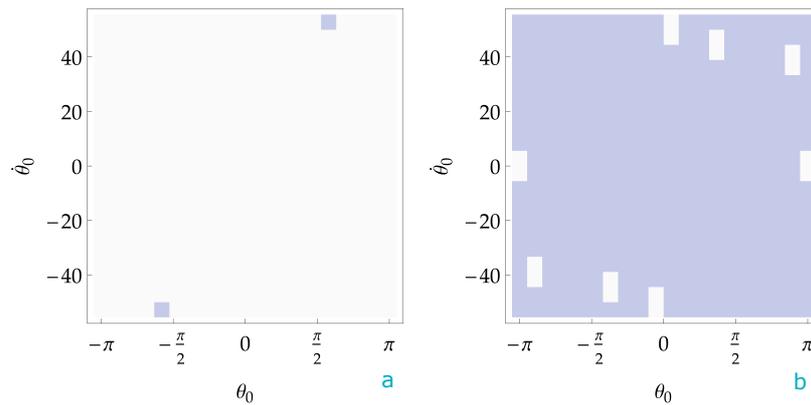


Figura 5: Cuencas de atracción y espacio de fase para  $H = 0,145\text{m}$  y  $\Omega = \pi \text{ rad/s}$  para el péndulo *a*: Sin acción de control; *b*: Con acción de control. En violeta claro se muestran las oscilaciones y en blanco el reposo.

Al analizar la región *b* para  $\Omega = 4\pi \text{ rad/s}$ , se encontró que las probabilidades de obtener rotaciones estables son bajas cuando no actúa la acción de control para pequeños valores de  $H$ , y que crecen de manera limitada alcanzando un máximo del orden de 18 % para  $H = 0,225\text{m}$ , punto a partir del cual vuelven a bajar. Al aplicar la acción de control estos valores crecen considerablemente, presentando una mejora sustancial en las cuencas de rotaciones. Como se aprecia en la figura 6, el 99 % de las respuestas se convierten en rotaciones gracias a la influencia de  $F_t$ . Para  $\theta = 0$  la acción de control no es capaz de lograr el escape de la cuenca de rotaciones, y para  $\theta = \pm\pi$  el modelo identifica que se mantiene en reposo, condición debida al modelo matemático e imposible en la realidad.

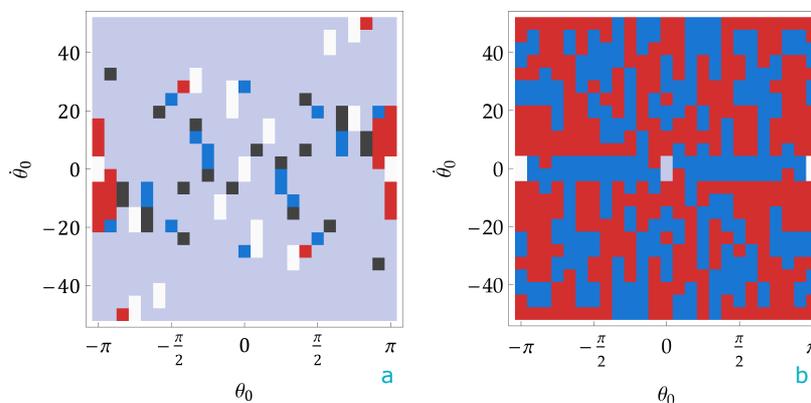


Figura 6: Cuencas de atracción y espacio de fase para  $H = 0,205\text{m}$  y  $\Omega = 4\pi \text{ rad/s}$  para el péndulo *a*: Sin acción de control; *b*: Con acción de control. Los elementos rojos y azules representan rotaciones horarias y anti-horarias respectivamente, y en negro se indican las soluciones con transitorios extensos y soluciones caóticas.

Para  $\Omega = 7\pi \text{ rad/s}$  la cantidad de soluciones rotantes también aumenta de forma notable. Sin embargo, para esta frecuencia de forzamiento la acción de control no es capaz de llevar al péndulo a la condición de rotación para todas las condiciones iniciales. Este resultado se asocia a que las oscilaciones son de naturaleza compleja, resultando de la combinación de oscilaciones con rotaciones durante cada periodo de forzamiento. De este modo, la velocidad del péndulo al pasar por el origen es superior a  $\dot{\theta}_B$  y la acción de control no se activa.

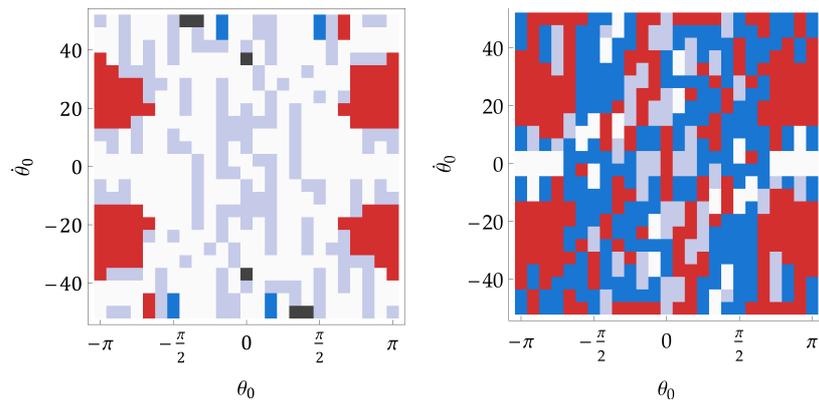


Figura 7: Cuencas de atracción y espacio de fase para  $H = 0,185\text{m}$  y  $\Omega = 7\pi \text{ rad/s}$  para el péndulo  $a$ : Sin acción de control;  $b$ : Con acción de control.

Finalmente se estudió el efecto de  $F_t$  al actuar sin el forzamiento periódico, mostrado en la figura 8 en la región alrededor de  $\theta = 0$ . Aquí se evidencia el salto en la velocidad al recibir el efecto del control, y queda claro que el valor de  $\dot{\theta}_B$  es importante, debido a que un valor por encima del límite planteado en Butikov (1999) permitiría que el sistema sostuviera rotaciones incluso en ausencia del forzamiento periódico.

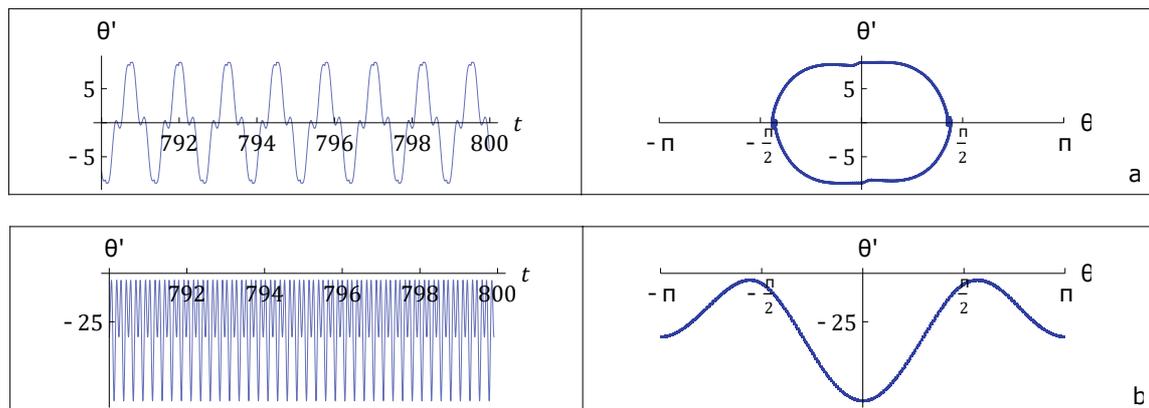


Figura 8:  $a$ : Respuesta oscilante para el péndulo con acción de control con  $\dot{\theta}_B = 9,838 \text{ rad/s}$ .  $b$ : Respuesta rotante para  $\dot{\theta}_B = 12 \text{ rad/s}$ , la acción de control es capaz de llevar al péndulo a la condición de rotación por sí misma.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió el efecto de una acción de control basada en el fenómeno electromagnético sobre un péndulo de masas múltiples con forzamiento periódico. El modelado mediante elementos finitos de una bobina fija y un imán montado sobre el péndulo, permitió obtener una expresión de la fuerza electromagnética de interacción en función del desplazamiento angular del péndulo. Al definir una función de control dependiente del movimiento, se obtuvo un modelo de la fuerza electromagnética como función de la posición y velocidad angular del péndulo.

El espacio de parámetros de respuestas rotantes para distintas condiciones de forzamiento permitió determinar las regiones características de respuestas del péndulo estudiado, las cuales permitieron definir las regiones de forzamiento más favorables para obtener rotaciones.

Los resultados muestran que en las zonas donde las rotaciones son posibles, la acción de control es capaz de incrementar de forma considerable su ocurrencia para condiciones iniciales aleatorias, disminuyendo así la sensibilidad de la no linealidad del sistema. Se mostró a su vez la importancia en la selección del límite superior en la velocidad de rotación de la función de accionamiento del control.

## 5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la secretaría de Ciencia y Tecnología de la UTN, la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, y la Comisión de Investigaciones Científicas de la provincia de Buenos Aires.

## REFERENCIAS

- Butikov E.I. The rigid pendulum - an antique but evergreen physical model. *European Journal of Physics*, 20:429, 1999. ISSN 0143-0807. doi:10.1088/0143-0807/20/6/308.
- Clifford M.J. y Bishop S.R. Rotating periodic orbits of the parametrically excited pendulum. *Physics Letters A*, 201:191–196, 1995. ISSN 0375-9601. doi:10.1016/0375-9601(95)00255-2.
- Falnes J. A review of wave-energy extraction. *Marine Structures*, 20:185–201, 2007. ISSN 0951-8339. doi:10.1016/J.MARSTRUC.2007.09.001.
- Garira W. y Bishop S.R. Rotating solutions of the parametrically excited pendulum. *Journal of Sound and Vibration*, 263:233–239, 2003. ISSN 0022-460X. doi:10.1016/S0022-460X(02)01435-9.
- Horton B., Wiercigroch M., y Xu X. Transient tumbling chaos and damping identification for parametric pendulum. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366:767–784, 2007. ISSN 1364503X. doi:10.1098/RSTA.2007.2126.
- Kraftmakher Y. Experiments with a magnetically controlled pendulum. *European Journal of Physics*, 28:1007, 2007. ISSN 0143-0807. doi:10.1088/0143-0807/28/5/023.