Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XLI, pp. 791-800
C.I. Pairetti, M.A. Pucheta, M.A. Storti, C.M. Venier (Eds.)
E. López, A. Lombardi, M. Olguin (Issue eds.)
Rosario, November 5-8, 2024

MÉTODO DE TAU APLICADO A UN PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES CON COEFICIENTES TÉRMICOS VARIABLES

TAU METHOD APPLIED TO A TWO-PHASE STEFAN PROBLEM WITH VARIABLE THERMAL COEFFICIENTS

Julieta Bollati[a,b], María T. Cao-Rial[c,d], María F. Natale[a], José A. Semitiel[a] y Domingo A. Tarzia[a,b]

[a]*Departamento de Matemática, Universidad Austral, Paraguay 1950, Rosario, S2000FZF, Argentina*

[b]*CONICET, Argentina*

[c]*Depto de Matemáticas, Universidade da Coruña, 15001 A Coruña, Spain*

[d]*CITMaga, Spain*

Palabras clave: Coeficientes térmicos variables, problema de Stefan, solución de tipo similaridad, método de Tau.

Resumen. Se considera un problema de Stefan a dos fases para un material semi-infinito con coeficientes térmicos variables, dependientes de una potencia de la temperatura. Mediante la transformación de similaridad, se obtiene un problema diferencial ordinario equivalente. Por un lado, se prueba la existencia y unicidad de solución, imponiendo una condición de Dirichlet en el borde fijo. Por otra parte, se obtienen soluciones aproximadas mediante el método de Tau, basado en la matriz operacional de las derivadas de los poliniomios de Chebyshev. Para el caso particular que surge cuando se consideran coeficientes térmicos constantes, se compara la solución exacta disponible en la literatura con las aproximaciones obtenidas con el fin de testear la exactitud del método de aproximación empleado.

Keywords: Variable thermal coefficients, Stefan problem, similarity-type solution, Tau method.

Abstract. A two-phase Stefan problem for a semi-infinite material with power-type temperature dependent thermal coefficients is considered. By using the similarity transformation, an equivalent ordinary differential problem is obtained. On one hand, the existence and uniqueness of the solution are proved by imposing a Dirichlet boundary condition at the fixed face. On the other hand, approximate solutions are obtained using the Tau method, which is based on the shifted Chebyshev operational matrix of differentiation. For the particular case that arises when considering constant thermal coefficients, the exact solution available in the literature is compared with the approximate one in order to test the accuracy of the employed approximation method.

ISSN: 2591-3522 DOI: 10.70567/mc.v41i15.78

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de Stefan con cambio de fase son cruciales para entender fenómenos como la transferencia de calor y la solidificación o fusión de materiales. Estos problemas describen la distribución de temperatura y la ubicación de la frontera entre fases sólida y líquida. Algunas aplicaciones incluyen la solidificación de aleaciones, la fundición continua de acero y la criopreservación de células.

La formulación clásica de los problemas de Stefan simplifica el modelo asumiendo coeficientes térmicos constantes, como la conductividad térmica y el calor específico. Sin embargo, se han desarrollado extensiones para abordar escenarios más complejos, incorporando coeficientes térmicos variables que cambian con la temperatura o el tiempo Bollati et al. (2024); Bougoffa et al. (2023).

Las soluciones explícitas de los problemas de Stefan son complejas debido a su naturaleza no lineal, por lo que se limitan a casos específicos. Esto hace necesario el uso de métodos de aproximación, como el método de Tau desarrollado en Lanczos (1938) y Ortiz (1969) , que utiliza polinomios de Chebyshev desplazados para resolver numéricamente diversos problemas.

Aunque el método de Tau se ha aplicado exitosamente en diversos campos, su utilización en problemas de cambio de fase con frontera móvil ha sido relativamente escasa en la literatura. Uno de los primeros trabajos relevantes en esta área fue AliAbadi y Ortiz (1998), y más recientemente en Kumar et al. (2019, 2020) se ha aplicado el método de Tau a problemas con conductividad térmica variable entre otras particularidades.

El objetivo de este trabajo es probar la existencia y unicidad de la solución para un problema de Stefan a dos fases con coeficientes térmicos variables dependientes de la temperatura. Se desarrolla un código en Scilab usando el método de Tau con polinomios de Chebyshev desplazados y se evalúa la precisión comparando las soluciones exactas con las aproximadas.

2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN

Se considera el dominio $\Omega = (0, +\infty)$ que representa el material semi-infinito, el cual, para cada $t > 0$ se puede descomponer en cuatro regiones: $\overline{\Omega} = \Gamma_D \cup \Gamma(t) \cup \Omega_1(t) \cup \Omega_2(t)$, donde: $\Gamma_D \equiv \{x = 0\}$ es la frontera Dirichlet; $\Gamma(t) \equiv \{x = s(t)\}$ es la frontera libre; $\Omega_1(t) = (0, s(t))$ representa la parte solidificada del material, mientras $\Omega_2(t) = (s(t), +\infty)$ es la parte líquida. Este proceso puede describirse mediante el siguiente problema de Stefan a dos fases:

Problem (2PSP): Hallar (u, s) tales que $\forall t > 0$:

$$\rho c_1(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1(u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right), \qquad x \in \Omega_1(t), \tag{1}$$

$$\rho c_2(u_2)\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2(u_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right), \qquad x \in \Omega_2(t), \tag{2}$$

$$u_2(+\infty, t) = u_2(x, 0) = u_\infty, \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u_1(x, t) = u_2(x, t) = u_s, \qquad x \in \Gamma(t), \tag{4}$$

$$u_1(x, t) = u_0, \qquad x \in \Gamma_D, \tag{5}$$

$$k_1(u_1(x, t))\frac{\partial u_1}{\partial x}(x, t) - k_2(u_2(x, t))\frac{\partial u_2}{\partial x}(x, t) = \rho \ell \dot{s}(t), \qquad x \in \Gamma(t), \tag{6}$$

$$s(0) = 0, \tag{7}$$

donde $u = u(x, t)$ representa la temperatura dada por $u = u_1(x, t)$ en $\Omega_1(t)$ y $u = u_2(x, t)$ en $\Omega_2(t)$, $\rho > 0$ es la densidad de masa, $\ell > 0$ es el calor latente por unidad de masa, u_0 representa a la temperatura impuesta en Γ_D, u_∞ es la temperatura inicial del material y u_s es la temperatura de cambio de fase en $\Gamma(t)$ siendo $u_0 < u_s < u_\infty$.

La conductividad térmica y el calor específico dependen de la temperatura en forma potencial:

$$k_i(u_i) = k_i^0 \left(1 + \delta \left(\tfrac{u_\infty - u_i}{u_\infty - u_s}\right)^p\right), \qquad c_i(u_i) = c_i^0 \left(1 + \delta \left(\tfrac{u_\infty - u_i}{u_\infty - u_s}\right)^p\right), \tag{8}$$

donde $\delta \geq 0$ y $p \geq 0$ son parámetros conocidos, $k_i^0 > 0$ representa la conductividad térmica de referencia y $c_i^0 > 0$ al calor específico de referencia. Se define además la difusividad térmica en cada fase por $\alpha_i = \frac{k_i^0}{\rho c_i^0}$. El índice $i = 1$ (sólido), $i = 2$ (líquido) se referirá a cada fase del material.

Buscaremos soluciones de tipo similaridad al problema (2PSP), expresando a $u = u(x,t)$ como una función de la variable de similaridad η:

$$y_i(\eta) = \tfrac{u_\infty - u_i(x,t)}{u_\infty - u_s} \geq 0, \qquad \text{con} \qquad \eta = \tfrac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}, \quad x \in \Omega. \tag{9}$$

Teniendo en cuenta la condición (4), la frontera libre toma la forma $s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}$, donde $\lambda >$ es un coeficiente adimensional desconocido.

Teorema 2.1. *Asumiendo*

$$H: \quad p, \delta \in \mathbb{R}_0^+, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad y_1 \in C^2(0,\lambda), \quad y_2 \in C^2(\lambda, +\infty), \tag{10}$$

el problema (2PSP) *tiene una solución de tipo similaridad* (u,s) *dada por*

$$u_1(x,t) = (u_s - u_\infty)\, y_1\left(\tfrac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right) + u_\infty, \qquad x \in \Omega_1(t), \tag{11}$$

$$u_2(x,t) = (u_s - u_\infty)\, y_2\left(\tfrac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right) + u_\infty, \qquad x \in \Omega_2(t), \tag{12}$$

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_2 t}, \tag{13}$$

si y sólo si (y_1, y_2, λ) *es una solución al siguiente problema diferencial ordinario* (ODPη) *definido por*

$$2\alpha\eta(1 + \delta y_1^p(\eta))y_1'(\eta) + [(1 + \delta y_1^p(\eta))y_1'(\eta)]' = 0, \qquad \eta \in (0,\lambda), \tag{14}$$

$$y_1(0) = \beta_1, \qquad y_1(\lambda) = 1, \tag{15}$$

$$2\eta(1 + \delta y_2^p(\eta))y_2'(\eta) + [(1 + \delta y_2^p(\eta))y_2'(\eta)]' = 0, \qquad \eta \in (\lambda, +\infty), \tag{16}$$

$$y_2(\lambda) = 1, \qquad y_2(+\infty) = 0, \tag{17}$$

$$y_1'(\lambda) - \tfrac{k_2^0}{k_1^0} y_2'(\lambda) = \tfrac{-2\alpha\lambda}{(1+\delta)\mathrm{Ste}}, \tag{18}$$

donde los parámetros adimensionales β_1*,* α *y* Ste *(número de Stefan) están dados por*

$$\beta_1 = \tfrac{u_\infty - u_0}{u_\infty - u_s} > 1, \qquad \alpha = \tfrac{\alpha_2}{\alpha_1} > 0, \qquad \mathrm{Ste} = \tfrac{c_1^0(u_\infty - u_s)}{\ell} > 0. \tag{19}$$

Lema 2.1. *Bajo la hipótesis* H *dada por* (10)*,* (y_1, y_2, λ) *es una solución al problema* (ODPη) *si y sólo si* (y_1, y_2, λ) *es una solución del siguiente problema funcional* (FPη) *dado por*

$$y_1(\eta) + \tfrac{\delta}{p+1} y_1^{p+1}(\eta) = \left(\beta_1 + \tfrac{\delta}{p+1}\beta_1^{p+1}\right) - A\tfrac{\mathrm{erf}(\sqrt{\alpha}\eta)}{\mathrm{erf}(\sqrt{\alpha}\lambda)}, \qquad \eta \in [0,\lambda], \tag{20}$$

$$y_2(\eta) + \tfrac{\delta}{p+1} y_2^{p+1}(\eta) = \left(1 + \tfrac{\delta}{p+1}\right)\tfrac{\mathrm{erfc}(\eta)}{\mathrm{erfc}(\lambda)}, \qquad \eta \in [\lambda, +\infty), \tag{21}$$

$$\tfrac{A\exp(-\alpha\lambda^2)}{\mathrm{erf}(\sqrt{\alpha}\lambda)} - \tfrac{B\exp(-\lambda^2)}{\mathrm{erfc}(\lambda)} = \tfrac{\sqrt{\alpha\pi}}{\mathrm{Ste}}\lambda, \tag{22}$$

donde $A = \beta_1 - 1 + \frac{\delta}{p+1}\left(\beta_1^{p+1} - 1\right) > 0$ *y* $B = \frac{k_2^0}{k_1^0\sqrt{\alpha}}\left(1 + \frac{\delta}{p+1}\right) > 0$.

Lema 2.2. *Asumiendo la hipótesis H dada por* (10)*, el problema* (FPη) *tiene única solución.*

Demostración. Definimos la función $g(z) = \frac{A\exp(-\alpha z^2)}{\mathrm{erf}(\sqrt{\alpha}z)} - \frac{B\exp(-z^2)}{\mathrm{erfc}(z)}$ para $z \in \mathbb{R}^+$. Por las propiedades de dicha función existe un único $\lambda > 0$ solución de (22). Luego reescribimos (20) y (21) como $F(y_1(\eta)) = H_1(\eta)$ con $\eta \in [0,\lambda]$ y $F(y_2(\eta)) = H_2(\eta)$ con $\eta \in [\lambda,+\infty)$, siendo $H_1(\eta) = \beta_1 + \frac{\delta}{p+1}\beta_1^{p+1} - A\frac{\mathrm{erf}(\sqrt{\alpha}\eta)}{\mathrm{erf}(\sqrt{\alpha}\lambda)}$, $\eta \in [0,\lambda]$, $H_2(\eta) = \left(1+\frac{\delta}{p+1}\right)\frac{\mathrm{erfc}(\eta)}{\mathrm{erfc}(\lambda)}$, $\eta \in [\lambda,+\infty)$. Por lo tanto, es fácil ver que las funciones $y_1 \in C^2(0,\lambda)$ y $y_2 \in C^2(\lambda,+\infty)$ dadas por $y_1(\eta) = F^{-1}(H_1(\eta))\,, \eta \in [0,\lambda]\,; y_2(\eta) = F^{-1}(H_2(\eta))$, $\eta \in [\lambda,+\infty)$, están bien definidas y son las únicas soluciones a las ecuaciones (20) y (21), respectivamente.

□

Los lemas previos permiten establecer el siguiente resultado principal:

Teorema 2.2. *Bajo la hipótesis H dada por* (10)*, sea (y_1, y_2, λ) la única solución al problema* (FPη)*. Luego, (u, s) dada por* (11)-(13) *es la única solución de tipo similaridad al problema de Stefan* (2PSP).

3. SOLUCIONES APROXIMADAS AL PROBLEMA (2PSP)

En esta sección, vamos a obtener una solución aproximada al problema de Stefan (2PSP) aplicando el método de Tau basado en la matriz operacional de diferenciación de Chebyshev desplazada.

Con el fin de obtener soluciones aproximadas al problema (2PSP), siguiendo Bollati et al. (2024), se asume en la fase líquida la existencia de una capa térmica $\widetilde{r}(t) > s(t)$, mas allá de la cual no hay transferencia de calor. Matemáticamente, esto equivale a asumir que para $x > \widetilde{r}(t)$, el material se encuentra a una temperatura de equilibrio y por lo tanto:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(\widetilde{r}(t),t) = 0, \qquad u_2(\widetilde{r}(t),t) = -u_\infty, \qquad t > 0. \tag{23}$$

Por esta razón, se considera un nuevo problema de Stefan en el dominio $\widetilde{\Omega}(t) = (0,\widetilde{r}(t))$ para cada $t > 0$ teniendo en cuenta las suposiciones anteriores:

Problem (2PSPN): Hallar $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{s}, \widetilde{r})$ tal que para todo $t > 0$:

$$\rho c_1(\widetilde{u}_1)\frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1(\widetilde{u}_1)\frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial x}\right), \qquad x \in \widetilde{\Omega}_1(t), \tag{24}$$

$$\rho c_2(\widetilde{u}_2)\frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2(\widetilde{u}_2)\frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial x}\right), \qquad x \in \widetilde{\Omega}_2(t), \tag{25}$$

$$\widetilde{u}_2(x,t) = -u_\infty, \qquad x \in \widetilde{\Gamma}_\infty(t), \tag{26}$$

$$\widetilde{u}_1(x,t) = \widetilde{u}_2(x,t) = u_s, \qquad x \in \widetilde{\Gamma}(t), \tag{27}$$

$$\widetilde{u}_1(x,t) = u_0, \qquad x \in \Gamma_D, \tag{28}$$

$$k_1(\widetilde{u}_1(x,t))\frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial x}(x,t) - k_2(\widetilde{u}_2(x,t))\frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial x}(x,t) = \rho\ell\dot{\widetilde{s}}(t), \qquad x \in \widetilde{\Gamma}(t), \tag{29}$$

$$\frac{\partial \widetilde{u}_2}{\partial x}(x,t) = 0, \qquad x \in \widetilde{\Gamma}_\infty(t) \tag{30}$$

$$\widetilde{s}(0) = 0, \tag{31}$$

$$\widetilde{r}(0) = 0, \tag{32}$$

donde $\Gamma_D = \{x = 0\}$, $\widetilde{\Omega}_1(t) = (0,\widetilde{s}(t))$, $\widetilde{\Gamma}(t) = \{x = \widetilde{s}(t)\}$, $\widetilde{\Omega}_2(t) = (\widetilde{s}(t),\widetilde{r}(t))$ y $\widetilde{\Gamma}_\infty(t) = \{x = \widetilde{r}(t)\}$.

A través del cambio de variables dado por (9) se puede establecer el siguiente resultado inmediato:

Teorema 3.1. *Asumiendo la hipótesis*

$$\widetilde{H}: p, \delta \in \mathbb{R}_0^+,\ \widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}^+,\ \widetilde{\mu} \in (\widetilde{\lambda}, +\infty),\ \widetilde{y}_1 \in C^2(0, \widetilde{\lambda}),\ \widetilde{y}_2 \in C^2(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}), \tag{33}$$

el problema (2PSPN) *tiene única solución de tipo similaridad* $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{s}, \widetilde{r})$ *dada por:*

$$\widetilde{u}_1(x,t) = (u_s - u_\infty)\, \widetilde{y}_1\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right) + u_\infty, \qquad x \in \widetilde{\Omega}_1(t), \tag{34}$$

$$\widetilde{u}_2(x,t) = (u_s - u_\infty)\, \widetilde{y}_2\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right) + u_\infty, \qquad x \in \widetilde{\Omega}_2(t), \tag{35}$$

$$\widetilde{s}(t) = 2\widetilde{\lambda}\sqrt{\alpha_2 t}, \qquad \widetilde{r}(t) = 2\widetilde{\mu}\sqrt{\alpha_2 t} \tag{36}$$

si y sólo si $(\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu})$ *satisface el problema diferencial ordinario* (ODPηN) *definido por*

$$2\alpha\eta(1 + \delta\widetilde{y}_1^{\,p}(\eta))\widetilde{y}_1{}'(\eta) + [(1 + \delta\widetilde{y}_1^{\,p}(\eta))\widetilde{y}_1{}'(\eta)]' = 0, \qquad \eta \in (0, \widetilde{\lambda}), \tag{37}$$

$$\widetilde{y}_1(0) = \beta_1, \qquad \widetilde{y}_1(\widetilde{\lambda}) = 1, \tag{38}$$

$$2\eta(1 + \delta\widetilde{y}_2^{\,p}(\eta))\widetilde{y}_2{}'(\eta) + [(1 + \delta\widetilde{y}_2^{\,p}(\eta))\widetilde{y}_2{}'(\eta)]' = 0, \qquad \eta \in (\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}), \tag{39}$$

$$\widetilde{y}_2(\widetilde{\lambda}) = 1, \qquad \widetilde{y}_2(\widetilde{\mu}) = 0, \qquad \widetilde{y}_2{}'(\widetilde{\mu}) = 0, \tag{40}$$

$$\widetilde{y}_1{}'(\widetilde{\lambda}) - \frac{k_2^0}{k_1^0}\widetilde{y}_2{}'(\widetilde{\lambda}) = \frac{-2\alpha\widetilde{\lambda}}{(1+\delta)\mathrm{Ste}}, \tag{41}$$

donde los parámetros adimensionales β_1*,* α *y* Ste *fueron definidos en* (19).

Con el fin de obtener soluciones aproximadas al problema diferencial ordinario en el dominio acotado $[0, \widetilde{\mu}]$, aplicaremos el método de Tau, el cual se basa en el uso de los polinomios de Chebyshev.

Previamente presentamos algunas propiedades de los polinomios de Chebyshev, Raslan et al. (2022) los cuales están definidos en el intervalo $[-1, 1]$ mediante la siguiente recurrencia:

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_j(x) = 2xT_{j-1}(x) - T_{j-2}(x), \quad j = 2, 3, 4, \ldots. \tag{42}$$

Para utilizar los polinomios de Chebyshev en un intervalo general $[a, b]$, introducimos los polinomios de Chebyshev desplazados Abdelhamied et al. (2023); Hesameddini y Riahi (2018), denotados por $T_j^{[a,b]}(x)$ los cuales se obtienen mediante:

$$T_j^{[a,b]}(x) = T_j\left(\frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}\right), \quad j = 2, 3, 4, \ldots. \tag{43}$$

con $T_0^{[a,b]}(x) = 1$ y $T_1^{[a,b]}(x) = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}$. Cualquier función $f \in L^2[a, b]$ puede descomponerse en la base ortogonal que forman los polinomios de Chebyshev desplazados. Sin embargo, en la práctica sólo se consideran los primeros $(N + 1)$-términos:

$$f(x) \approx f_N(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j T_j^{[a,b]}(x) = A\, T^{[a,b]}(x), \quad x \in [a, b], \tag{44}$$

donde $A = [a_0\ a_1\ \ldots\ a_N]$ y $T^{[a,b]}(x) = \left[T_0^{[a,b]}(x)\ T_1^{[a,b]}(x)\ \ldots\ T_N^{[a,b]}(x)\right]^t$ son vectores de $(N+1)$ componentes. Siguiendo Sahlan y Feyzollahzadeh (2017) se deduce que

$$T^{[a,b]}(x) = TW_{a,b}X(x), \tag{45}$$

donde el vector X está dado por $X(x) = \left[1\ x\ x^2\ ...\ x^N\right]^t$, $T = [t_{kj}]$ es la matriz $(N+1) \times (N+1)$ definida por

$$t_{kj} = \begin{cases} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) & \text{si} \quad k = 0, 1, ..., N,\ j = 0 \\ 2^{k-1} & \text{si} \quad k = j = 1, 2, ..., N \\ \operatorname{sgn}\left(t_{k-1,\,j-1}\right)\left(2|t_{k-1,\,j-1}| + |t_{k-2,\,j}|\right) & \text{if} \quad k = 2, 3, ..., N, j = 1, ..., k-1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

y $W_{a,b} = [w_{kj}]$, es la matriz $(N+1) \times (N+1)$ donde

$$w_{kj} = \begin{cases} \binom{k}{j}\left(-\frac{b+a}{b-a}\right)^{k-j}\left(\frac{2}{b-a}\right)^j & \text{si} \quad k = 0, 1, ..., N,\ j = 0, 1, ..., k \\ 0 & \text{si} \quad k < j \end{cases}$$

Teniendo en cuenta Raslan et al. (2022), la derivada de orden n del vector $T^{[a,b]}(x)$ dada por (45) puede escribirse como:

$$\left(T^{[a,b]}\right)^{(n)}(x) = T\ W_{a,b}\ B^n X(x), \tag{46}$$

donde $B = [b_{kj}]$, es la matriz $(N+1) \times (N+1)$ definida por:

$$b_{kj} = \begin{cases} j+1 & \text{si} \quad k = j+1,\ j = 0, 1, ..., N \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

y $n \in \mathbb{N}$ denota la potencia n-ésima de la matriz B. Luego, de (44), la derivada de orden n de la función f_N está dada por

$$f_N^{(n)}(x) = A\ T\ W_{a,b}\ B^n X(x). \tag{47}$$

De este modo, las funciones incógnitas $\widetilde{y}_1 = \widetilde{y}_1(\eta) \in C^2(0, \widetilde{\lambda})$ y $\widetilde{y}_2 = \widetilde{y}_2(\eta) \in C^2(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu})$ del problema (ODPηN) se pueden expresar en función de los polinomios de Chebyshev como en (44):

$$\widetilde{y}_1(\eta) \approx \widetilde{y}_{1_N}(\eta) = \sum_{j=0}^{N} c_j T_j^{[0,\widetilde{\lambda}_N]}(\eta) = C\ T^{[0,\widetilde{\lambda}_N]}(\eta), \qquad \eta \in [0, \widetilde{\lambda}_N], \tag{48}$$

$$\widetilde{y}_2(\eta) \approx \widetilde{y}_{2_N}(\eta) = \sum_{j=0}^{N} d_j T_j^{[\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N]}(\eta) = D\ T^{[\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N]}(\eta), \qquad \eta \in [\widetilde{\lambda}_N, \widetilde{\mu}_N], \tag{49}$$

donde $C = [c_0\ c_1\ ...\ c_N]$ y $D = [d_0\ d_1\ ...\ d_N]$ son vectores filas de $(N+1)$ componentes que deben ser determinados. De acuerdo a (45), se sigue que

$$\widetilde{y}_{1_N}(\eta) = C\ T\ W_{0,\widetilde{\lambda}_N} X(\eta),\ \eta \in [0, \widetilde{\lambda}_N], \quad \widetilde{y}_{2_N}(\eta) = D\ T\ W_{\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N} X(\eta),\ \eta \in [\widetilde{\lambda}_N, \widetilde{\mu}_N]. \tag{50}$$

De (50), y considerando que las derivadas pueden expresarse según (47), el residuo $R_{N,\widetilde{y}_{i_N}}(\eta)$ para $i = 1, 2$ se define por:

$$\begin{aligned} R_{N,\,\widetilde{y}_{1_N}}(\eta) \quad = \quad & 2\alpha\eta\left(1 + \delta(C\ T\ W_{0,\widetilde{\lambda}_N} X)^p\right) CTW_{0,\widetilde{\lambda}_N} BX \\ & + \delta p(CTW_{0,\widetilde{\lambda}_N} X)^{p-1} CTW_{0,\widetilde{\lambda}_N} BXCTW_{0,\widetilde{\lambda}_N} BX \\ & + \left(1 + \delta(C\ T\ W_{0,\widetilde{\lambda}_N} X)^p\right) CTW_{0,\widetilde{\lambda}_N} B^2 X, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} R_{N,\,\widetilde{y}_{2N}}(\eta) \;&=\; 2\eta\left(1+\delta(D\,T\,W_{\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N}X)^p\right)DTW_{\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N}BX \\ &+\delta p(DTW_{\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N}X)^{p-1}DTW_{\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N}BXDTW_{\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N}BX \\ &+\left(1+\delta(D\,T\,W_{\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N}X)^p\right)DTW_{\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N}B^2X. \end{aligned} \tag{52}$$

En virtud de las dos ecuaciones anteriores, a partir de ahora asumiremos que $p \geq 1$. De acuerdo con el método de Tau, para minimizar los residuos en el sentido de que los primeros $(N+1)$ términos de su serie espectral sean cero, generamos las siguientes $2N-2$ ecuaciones no lineales para $j = 0, 1, ..., N-2$, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interno usual en $L^2(a,b)$:

$$\left\langle R_{N,\,\widetilde{y}_{1N}}(\eta),\ T_j^{[0,\widetilde{\lambda}_N]}(\eta)\right\rangle = \int_0^{\widetilde{\lambda}_N} R_{N,\,\widetilde{y}_{1N}}(\eta)T_j^{[0,\widetilde{\lambda}_N]}(\eta)d\eta = 0, \tag{53}$$

$$\left\langle R_{N,\,\widetilde{y}_{2N}}(\eta),\ T_j^{[\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N]}(\eta)\right\rangle = \int_{\widetilde{\lambda}_N}^{\widetilde{\mu}_N} R_{N,\,\widetilde{y}_{2N}}(\eta)T_j^{[\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N]}(\eta)d\eta = 0. \tag{54}$$

Considerando las condiciones (38), se obtiene que

$$CTW_{0,\widetilde{\lambda}_N}X(0) = \beta_1, \qquad CTW_{0,\widetilde{\lambda}_N}X(\widetilde{\lambda}_N) = 1. \tag{55}$$

De igual manera, de (40) se deduce que

$$DTW_{\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N}X(\widetilde{\lambda}_N) = 1, \quad DTW_{\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N}X(\widetilde{\mu}_N) = 0, \quad DTW_{\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N}BX(\widetilde{\mu}_N) = 0. \tag{56}$$

Finalmente, la condición (41) resulta equivalente a

$$\left(CTW_{0,\widetilde{\lambda}_N} - \tfrac{k_2^0}{k_1^0}DTW_{\widetilde{\lambda}_N,\widetilde{\mu}_N}\right)BX(\widetilde{\lambda}_N) = -\tfrac{2\alpha}{(1+\delta)\mathrm{Ste}}\widetilde{\lambda}_N. \tag{57}$$

El método de Tau consiste en obtener los vectores C y D, así como los parámetros positivos $\widetilde{\lambda}_N$ y $\widetilde{\mu}_N$, resolviendo el sistema no lineal equivalente de $2N+4$ ecuaciones definido por (53)-(57).

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

En virtud de las equivalencias establecidas en los teoremas anteriores, en esta sección analizaremos la precisión de las soluciones aproximadas obtenidas para el problema (ODPηN) mediante el método de Tau, comparándolas con la solución exacta del problema (ODPη) presentada en la Sección 2.

La solución exacta al problema (ODPη), asumiendo que la conductividad térmica y el calor específico son constantes positivas dadas $k_i = k_i^0$, $c_i = c_i^0$, está dada por (11)-(13) cuando se considera $\delta = 0$. Si se fijan los valores Ste $= 0{,}1$, $\alpha = 0{,}9$, $u_\infty = 2°C$, $u_s = 1{,}8°C$, $u_0 = 1°C$, $\alpha_2 = 1{,}3\frac{m^2}{s}$ y $\frac{k_2^0}{k_1^0} = 1{,}1$, entonces el parámetro que caracteriza a la frontera libre exacta está dado por $\lambda = 0{,}4005556$. La solución aproximada $(\widetilde{y}_{1N}, \widetilde{y}_{2N}, \widetilde{\lambda}_N, \widetilde{\mu}_N)$ al problema (ODPηN) se obtiene resolviendo el sistema no lineal (53)-(57) cuando $\delta = 0$. Para $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$ y $N = 5$, las soluciones de los sistemas no lineales de $2N+4$ ecuaciones definidos por (53)-(57) se presentan en la Tabla 1.

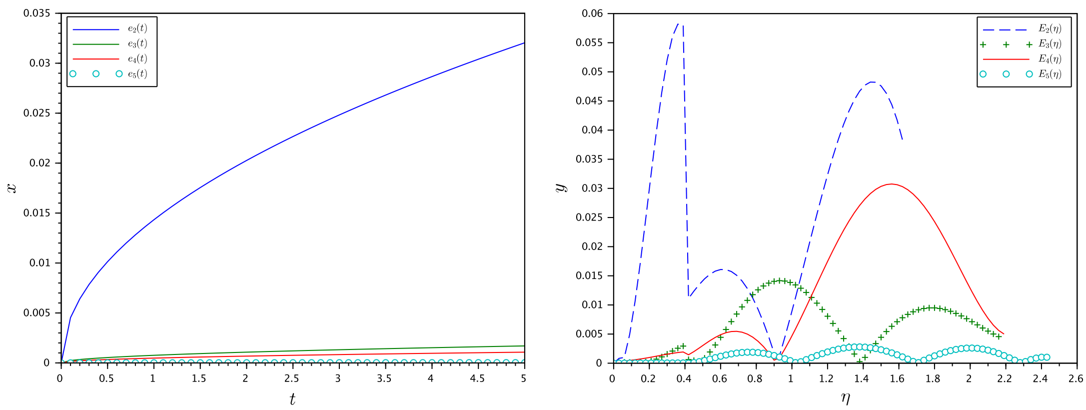
Debido a la similitud entre los coeficientes λ y $\widetilde{\lambda}_N$, para apreciar la diferencia entre las fronteras libres aproximadas y exacta, la Figura 1(a) muestra el error absoluto $e_N(t) = |s(t) - \widetilde{s}_N(t)|$, donde $\widetilde{s}_N(t) = 2\widetilde{\lambda}_N\sqrt{\alpha_2 t}$, para $N = 2,3,4,5$ en el intervalo de tiempo $t \in (0,5)$ s. Como era de esperar, el error absoluto aumenta respecto del tiempo t y disminuye a medida que N aumenta.

Tabla 1: Soluciones al sistema no lineal (53)-(57) para $\delta = 0$

N	$\widetilde{\lambda}_N$	$\widetilde{\mu}_N$	Vector de coeficientes C y D para $\widetilde{y}_{i_N}$, $i = 1, 2$ respectivamente
2	0,4068404	1,6330352	[2,9636606 $-$2,0000000 0,0363394] [0,3750000 $-$0,5000000 0,1250000]
3	0,4002221	2,1869234	[2,9648161 $-$2,0055373 0,0351947 0,0055324] [0,3108273 $-$0,4679717 0,1888369 $-$0,032445]
4	0,4007662	2,2194037	[2,9642863 $-$2,0055161 0,0359064 0,0055716 $-$0,0002002] [0,2981045 $-$0,4684118 0,2057383 $-$0,0328739 $-$0,0043209]
5	0,4005504	2,4391824	[2,9642907 $-$2,0055606 0,0358661 0,0055745 $-$0,0001568 $-$0,0000139] [0,2871744 $-$0,448296 0,2122791 $-$0,0551898 0,0005464 0,0034858]

La Figura 1(b) muestra el error absoluto $E_N(\eta) = |y(\eta) - \widetilde{y}_N(\eta)|$ en función de $\eta \in [0, \widetilde{\mu}_N]$ para $N = 2, 3, 4, 5$, donde

$$y(\eta) = \begin{cases} y_1(\eta) & \text{si} \quad \eta \in [0, \lambda], \\ y_2(\eta) & \text{si} \quad \eta \in [\lambda, +\infty), \end{cases} \quad \text{and} \quad \widetilde{y}_N(\eta) = \begin{cases} \widetilde{y}_{1_N}(\eta) & \text{si} \quad \eta \in [0, \widetilde{\lambda}_N], \\ \widetilde{y}_{2_N}(\eta) & \text{si} \quad \eta \in [\widetilde{\lambda}_N, \widetilde{\mu}_N]. \end{cases}$$



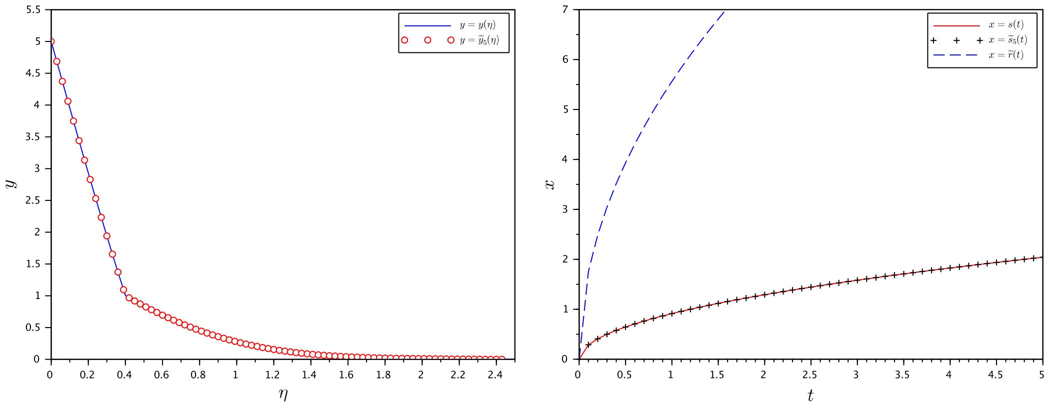
(a) $e_N(t)$, $N = 2, 3, 4, 5$ hasta $t = 5$s (b) $E_N(\eta)$ para $0 \leq \eta \leq \widetilde{\mu}_N$, $N = 2, 3, 4, 5$

Figura 1: Errores absolutos cuando $\delta = 0$ (coeficientes térmicos constantes)

Las Figuras 1(a) y 1(b) muestran que los errores absolutos más pequeños para la frontera libre s y la función y se obtienen con $N = 5$. La Figura 2(a) compara la función exacta y con la aproximada $y = \widetilde{y}_5$ y revela la discontinuidad de la derivada sobre la frontera libre. La Figura 2(b) muestra la proximidad entre la frontera libre exacta $x = s(t)$ y su aproximación numérica $x = \widetilde{s}_5(t)$, y cómo la capa térmica $\widetilde{r}(t)$ simula la frontera infinita del problema de Stefan.

Estos resultados confirman que el método de Tau utilizado para obtener las soluciones aproximadas es eficiente y preciso en el caso en que se consideren coeficientes térmicos constantes. Además, como era de esperar, concluimos que cuanto mayor es el orden de la matriz de diferenciación, más precisos son los resultados.

Una vez analizada la precisión del método de Tau en el caso en que los coeficientes térmicos son constantes, aproximaremos la solución del problema (ODPη) utilizando el problema (ODPηN) para coeficientes térmicos lineales, dados por (8) con $p = 1$. Consideraremos los valores fijos Ste $= 0{,}1$, $\alpha = 0{,}9$, $u_\infty = 2°$C, $u_s = 1{,}8°$C, $u_0 = 1°$C, $\alpha_2 = 1{,}3$, $\frac{m^2}{s}$, $\frac{k_2^0}{k_1^0} = 1{,}1$ y $\delta = 0{,}1$. Primero, se calcula el coeficiente que caracteriza la frontera libre exacta, $\lambda = 0{,}4518618$, que se obtiene como la única solución de (22) para $p = 1$. Además, se obtienen las soluciones aproximadas a los sistemas no lineales definidos por (53)-(57), para $N = 2, 3, 4, 5$, cuyos resultados se presentan en la Tabla 2.



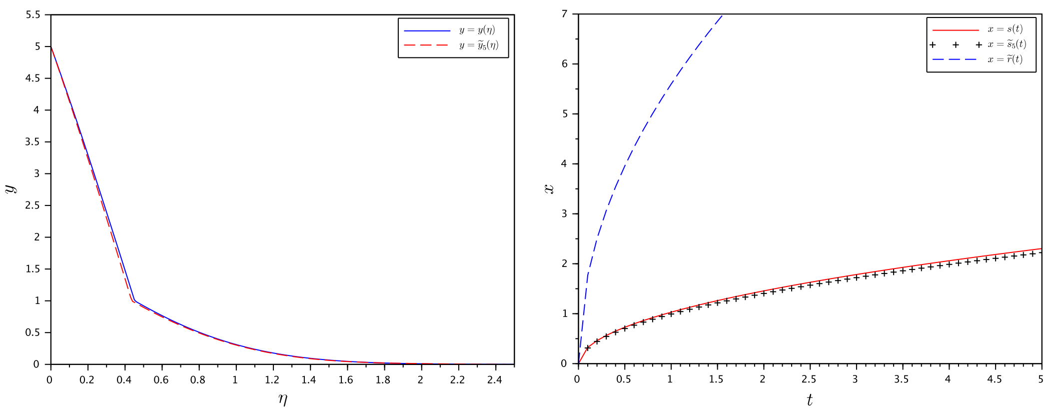
(a) $y = y(\eta)$, $y = \widetilde{y}_5(\eta)$ para $0 \leq \eta \leq \widetilde{\mu}_5$ y $\delta = 0$ (b) s, $\widetilde{s}_5$ y $\widetilde{r}$ hasta $t = 5$s para $\delta = 0$

Figura 2: Soluciones exactas y aproximadas para $N = 5$ con $\delta = 0$ (coeficientes térmicos constantes)

Tabla 2: Soluciones al sistema no lineal (53)-(57) para $p = 1$

N	$\widetilde{\lambda}_N$	$\widetilde{\mu}_N$	Vectors C and D for coefficients of $\widetilde{y}_{i_N}$, $i = 1, 2$ respectively
2	0,4405534	1,6794467	[3,0344871 $-$2 $-$0,0344871] [0,375 $-$0,5 0,125]
3	0,4355255	2,1068305	[3,0342796 $-$2,0038005 $-$0,0342796 0,0038005] [0,3257571 $-$0,4753785 0,1742429 $-$0,0246215]
4	0,4356756	2,2920901	[3,0341713 $-$2,0038239 $-$0,0344134 0,0037727 0,0000418] [0,2962458 $-$0,4647085 0,2066089 $-$0,0357906 $-$0,0040166]
5	0,4357936	2,4544558	[3,0343772 $-$2,0038335 $-$0,0344292 0,0038433 0,0000520 $-$0,0000097] [0,2890845 $-$0,4503434 0,2115404 $-$0,0534747 $-$0,0006249 0,0038181]

Debido a la similitud entre las soluciones exactas y aproximadas para $N = 2, 3, 4, 5$, resulta visualmente difícil observar las diferencias entre ellas. Por lo tanto, en la Figura 3(a) nos centramos únicamente en el caso particular $N = 5$ y representamos la función exacta $y = y(\eta)$ dada por (20) y (21), así como la función aproximada $y = \widetilde{y}_5(\eta)$ dada por (50), para valores de $\eta \in [0, \widetilde{\mu}_5]$ con $\widetilde{\mu}_5 = 2{,}4544558$. Además, para este caso, en la Figura 3(b) mostramos la frontera libre exacta $x = s(t)$, la frontera libre aproximada $x = \widetilde{s}_5(t)$, y la capa térmica $\widetilde{r}(t) = 2\widetilde{\mu}_5\sqrt{\alpha_2 t}$ para $t \in (0, 5)$ segundos.



(a) $y = y(\eta)$, $y = \widetilde{y}_5(\eta)$ para $0 \leq \eta \leq \widetilde{\mu}_5$ y $p = 1$ (b) s, $\widetilde{s}_5$ y $\widetilde{r}$ hasta $t = 5$s para $p = 1$

Figura 3: Soluciones exactas y aproximadas para $N = 5$ con $p = 1$ (coeficientes térmicos lineales)

5. CONCLUSIONES

Se analizó un problema de Stefan unidimensional para la solidificación de un material semi-infinito con coeficientes térmicos dependientes de la temperatura y una condición de Dirichlet en el borde fijo. Se derivó en un problema diferencial ordinario equivalente y este último en un problema funcional a partir del cual se demostró la existencia y unicidad de la solución. Se obtuvieron además aproximaciones numéricas mediante el método de Tau con matrices operacionales de Chebyshev desplazadas, cuya precisión se validó comparando con soluciones exactas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido sponsoreado por el programa European Union's Horizon 2020 Research and Innovation Programme (Marie Sklodowska-Curie 823731 CONMECH) y los proyectos O06-24CI1901 y O06-24CI1903 de la Universidad Austral, Rosario, Argentina.

REFERENCIAS

Abdelhamied D., Abdelhakem M., El-Kady M., y Youssri M. Adapted Shifted ChebyshevU Operational Matrix of Derivates: Two Algorithms for Solving Even-Order BVPs. *Applied Mathematics and Information*, 17(3):575–581, 2023. doi:http://dx.doi.org/10.18576/amis/170318.

AliAbadi M. y Ortiz E. Numerical treatment of moving and free boundary value problems with the tau method. *Computers and Mathematics with Applications*, 35(8):53 – 61, 1998. doi:10.1016/S0898-1221(98)00044-3.

Bollati J., Natale M.F., Semitiel J.A., y Tarzia D.A. A two-phase Stefan problem with power-type temperature-dependent thermal conductivity. Existence of a solution by two fixed points and numerical results. *AIMS Mathematics*, 9:21189–21211, 2024. doi:https://doi.org/10.3934/math.20241029.

Bougoffa L., Bougouffa S., y Khanfer A. An Analysis of the One-Phase Stefan Problem with Variable Thermal Coefficients of Order p. *Axioms*, 12, 2023. doi:https://doi.org/10.3390/axioms12050497.

Hesameddini E. y Riahi M. Shifted Chebyshev polynomial method for solving systems of linear and nonlinear Fredhom-Volterra integro-differential equations. *Journal of Mathematical Extension*, 12(3):55–79, 2018.

Kumar A., Singh A.K., y Rajeev R. A Stefan problem with variable thermal coefficients and moving phase change material. *Journal of King Saud University Science*, 31:1064–1069, 2019.

Kumar A., Singh A.K., y Rajeev R. A moving boundary problem with variable specific heat and thermal conductivity. *Journal of King Saud University - Science*, 32:384–389, 2020.

Lanczos C. Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. *Studies in Applied Mathematics*, 17(1-4):123 – 199, 1938. doi:10.1002/sapm1938171123.

Ortiz E.L. The tau method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 6(3):480–492, 1969. doi:10.1137/0706044.

Raslan K., Ali K., Mohamed E., Younis J., y Abd El salam M. An Operational Matrix Technique Based on Chebyshev Polynomials for Solving Mixed Volterra-Fredholm Delay Integro-Differential Equations of Variable-Order. *Journal of Function Spaces*, 2022(6203440):1–15, 2022. doi:10.1155/2022/6203440.

Sahlan M. y Feyzollahzadeh H. Operational matrices of Chebyshev polynomials for solving singular Volterra integral equations. *Mathematical Sciences*, 11:165–171, 2017.