

MODELO CONTINUO ANISÓTROPO DE TRÁFICO URBANO: UNA FORMULACIÓN EVOLUTIVA

ANISOTROPIC CONTINUUM MODEL FOR URBAN TRAFFIC: AN EVOLUTIONARY FORMULATION

Víctor H. Cortínez^{a,b,c}, Patricia N. Dominguez^{a,b} y Cecilia I. Stoklas^a

^a*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada (CIMTA), Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, vcortine@hotmail.com; stoklas@frbb.utn.edu.ar*

^b*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, pdoming@uns.edu.ar*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnica, CONICET*

Palabras clave: Tráfico urbano, Congestión, Modelo continuo evolutivo, Elementos finitos.

Resumen. En este trabajo se presenta un modelo continuo para determinar la distribución de vehículos en una red vehicular urbana bajo condiciones de congestión. La formulación conduce a un sistema evolutivo de ecuaciones diferenciales parciales que puede resolverse convenientemente mediante el método de elementos finitos. Las características del entramado de calles están codificadas en parámetros del sistema similares a las conductividades de una ecuación de difusión. La solución asintótica de tal sistema (para tiempos suficientemente altos) converge a los flujos vehiculares y tiempos de viaje correspondientes al equilibrio de Wardrop. Se presenta la formulación del problema y se estudia la eficiencia del modelo mediante una comparación de resultados con aquellos determinados con el tradicional enfoque discreto detallado.

Keywords: Urban traffic, Congestion, Evolutionary continuum model, Finite elements.

Abstract. This paper presents a continuous model to determine the distribution of vehicles in an urban vehicular network under congestion conditions. The formulation leads to an evolutionary system of partial differential equations that can be conveniently solved using the finite element method. The characteristics of the street network are encoded in system parameters similar to the conductivities in a diffusion equation. The asymptotic solution of such a system (for sufficiently high times) converges to the vehicular flows and travel times corresponding to Wardrop's equilibrium. The problem formulation is presented, and the efficiency of the model is studied through a comparison of results with those determined by the traditional detailed discrete approach.

1 INTRODUCCIÓN

Para mitigar la congestión de tráfico urbano existen diferentes alternativas que involucran modificaciones de la red de transporte, tales como cambios de sentido de circulación de arterias, semaforización, prohibición de estacionamientos en las calles, construcción de nuevos tramos, restricción de velocidad, etc. Para evaluar el efecto de tales modificaciones se deben estimar los flujos vehiculares esperados en cada tramo de la red de transporte de acuerdo a la elección de rutas por parte de los usuarios. Tal problema se conoce con el nombre de asignación de tráfico y se basa en el denominado primer principio de Wardrop o equilibrio de usuario (Boyles et al. 2022). Éste establece que los usuarios eligen la ruta hacia un determinado destino de manera tal de minimizar su propio tiempo de viaje. El equilibrio de usuario puede ser formulado matemáticamente como un problema de optimización en gran escala (problema de Beckmann). Diversos métodos se han propuesto para resolver de manera eficiente este problema, en particular la clásica técnica de Frank- Wolfe (Boyles et al. 2022). Se han desarrollado además planteos alternativos tales la formulación de complementariedad multiclase cuya estructura matemática permite una solución computacional eficiente mediante programas muy utilizados tales como el GAMS (Ferris et al. 1999). En los últimos años ha surgido un enfoque promisorio para resolver el problema de equilibrio usuario, denominado algoritmo Physarum. Se trata de un método iterativo eficiente para la determinación de flujos de transporte en redes congestionadas y se muestra apto para programación en paralelo (Xu et al. 2018, Dominguez et al. 2021, 2023).

Una idea alternativa para estimar flujos vehiculares en una ciudad es modelar la red como un medio continuo poroso bidimensional. Tal estrategia conduce a ecuaciones diferenciales parciales que pueden ser apropiadamente resueltas mediante el método de elementos finitos (MEF) (Sasaki et al. 1990, Du et al. 2016). Este tipo de modelización fue concebido inicialmente como una aproximación al problema que omite los detalles de la red y la concibe como un medio continuo isótropo. Tal enfoque permite obtener resultados de manera simple, aunque no tan precisa como el enfoque discreto. Además, la calibración de tales modelos continuos debe realizarse de manera independiente a la modelización discreta. Es decir, los modelos discretos y continuos no guardaban una relación entre sí. Los autores han presentado un refinamiento del modelo continuo, obteniéndolo a partir del enfoque discreto mediante un proceso de homogeneización (Dominguez 2013, Cortínez y Dominguez 2013, 2017). Dicho enfoque concibe a la red como un medio continuo anisótropo. Esta forma hace posible considerar detalles de la red y obtener soluciones computacionales relativamente simples con una precisión comparable al enfoque discreto. Tal modelo conduce a un sistema gobernante de ecuaciones diferenciales no lineales de tipo difusión estacionaria. La solución numérica de dichas ecuaciones puede realizarse mediante el MEF. Sin embargo, debido al carácter degenerado de las ecuaciones (el sistema tiende a indeterminarse para flujos de tráfico muy bajos), la solución numérica presenta ciertas dificultades. Para superar dicho inconveniente, en este trabajo se presenta una versión dinámica del modelo que constituye una extensión del enfoque Physarum usado en el enfoque discreto (Dominguez 2023). Se demuestra que cuando la correspondiente variable temporal tiende a infinito, se obtiene la distribución de flujos vehiculares buscada. La solución numérica de las ecuaciones propuestas puede ser obtenida de manera eficiente mediante el MEF. Se presenta la formulación matemática y se muestran algunos ejemplos de aplicación. La precisión del presente enfoque se estudia comparando con los resultados determinados mediante la formulación discreta.

2 FORMULACIÓN

Se considera una red urbana de tráfico durante una hora pico cuando los usuarios viajan

desde sus hogares distribuidos sobre toda la ciudad hacia ciertos puntos de destino d ($d=1,2,\dots,Nd$). Se conoce la topología de la red, asumida por un conjunto de arcos dirigidos a ($a=1,2,\dots,Na$) con características conocidas (capacidad, longitud, velocidad máxima permitida), conectados por nodos i ($i=1,2,\dots,Nn$). El sentido permitido de cada arco a uniendo los nodos i y j se define mediante un indicador $\bar{\lambda}_{ij}$ que vale 1 si la dirección permitida es desde i hacia j y -1 en el caso opuesto.

Se conocen las tasas de generación de viaje Q_j^d (veh/h) en cada nodo j de la red hacia cada destino d . Tales tasas pueden depender del tiempo de viaje en la red congestionada (demanda elástica). El problema de asignación de tráfico consiste en determinar los flujos g_a^{*d} (veh/h), en cada arco dirigiéndose hacia los diferentes destinos d y los tiempos de viaje u_i^{*d} (h) desde cada nodo i al correspondiente destino d .

2.1 Modelo discreto de una red de transporte: Equilibrio de usuario

Se asume que las elecciones de ruta de los usuarios se realizan en condiciones de equilibrio de usuario de acuerdo al primer principio de Wardrop (Boyles et al 2022). La congestión de tráfico urbano puede definirse como el incremento en el tiempo de viaje τ_a en un arco a , causado por el incremento del flujo total \bar{g}_a^* en el mismo. Matemáticamente esta relación se puede expresar como:

$$\tau_a = \tau_a(\bar{g}_a^*) \quad , \quad a = 1, 2, \dots, Na \quad , \quad (1)$$

donde $\bar{g}_a^* = \sum_{d=1}^{Nd} g_a^{*d}$, siendo $\tau_a(\bar{g}_a^*)$ una función creciente (empírica), denominada generalmente “función de costo”. El primer principio de Wardrop establece que usuarios de una red de transporte alcanzan un estado de equilibrio en los que el tiempo de viaje entre un punto dado de la red al punto de destino es único (y el mínimo) para todos los caminos realmente usados. Otra forma de formular este principio es asumir que el tiempo de viaje hacia un destino dado es una función potencial que depende de la posición (x_i, y_i) , pero no de la trayectoria: $u_i^{*d} = u^{*d}(x_i, y_i)$, siendo por definición $u_d^{*d} = u^{*d}(x_d, y_d) = 0$, donde (x_d, y_d) son las coordenadas del punto de destino considerado. Consecuentemente, el tiempo de viaje sobre el arco a para un usuario dirigiéndose hacia d puede expresarse como la diferencia de la función potencial en los extremos del arco (nodos i y j):

$$\tau_a = u_i^{*d} - u_j^{*d} \quad , \quad \left(\text{si } u_i^{*d} > u_j^{*d} \quad \text{y} \quad g_a^{*d} > 0 \right) \quad , \quad a = 1, 2, \dots, Na \quad . \quad (2)$$

Debe observarse de acuerdo a (1) que, en condiciones de equilibrio, el tiempo de viaje en cada arco hacia un destino d es el mismo para todos los usuarios, independientemente de sus destinos. Por otra parte, debe asegurarse la conservación de los vehículos circulando en la red. Esto puede formularse como una ecuación en cada nodo de la red para los flujos dirigiéndose hacia cualquier destino d :

$$\sum_{i \in R_j} \pm g_a^{*d} + Q_j^d = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, Nn \quad , \quad (3)$$

donde R_j corresponde al conjunto de arcos vinculados al nodo j y el signo + (-) de la ecuación aplica si el flujo está entrando al (saliendo del) nodo j . Las ecuaciones (1-3) constituyen un

sistema algebraico no lineal de $(Na + Na Nd + Nn Nd)$ ecuaciones para las incógnitas τ_a, g_a^{*d} y u_i^{*d} . Esta formulación presentada (Cortínez y Dominguez 2017) es muy similar al enfoque de complementariedad mixto de Ferris et al. (1999).

2.2 Modelo discreto evolutivo de una red de transporte (Enfoque Physarum)

Una forma conveniente de resolver el problema anterior es a partir de su reformulación como un problema evolutivo (algoritmo Physarum) (Dominguez et al. 2023). Para ello, el flujo en cada arco a hacia un destino d se expresa como:

$$g_a^d = M_a^d (u_i^d - u_j^d), \quad (4)$$

siendo M_a^d un coeficiente de conductividad en el tramo a para vehículos dirigiéndose hacia d . A partir de (4), las ecuaciones de continuidad (3) pueden ser reexpresadas de la siguiente manera:

$$\sum_{i \in P_j} M_a^d (u_i^d - u_j^d) + Q_j^d = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_n, \quad d = 1, 2, \dots, N_d. \quad (5)$$

donde P_j corresponde al número de nodos adyacentes al nodo j . La conductividad M_a^d del arco a evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\frac{dM_a^d}{dt} = \frac{g_a^d \xi_a^d}{\tau_a \left(\sum_d g_a^d \xi_a^d \right)} - M_a^d, \quad a = 1, 2, \dots, N_a, \quad d = 1, 2, \dots, N_d. \quad (6)$$

El factor ξ_a^d , introducido para evitar la consideración de flujos a contramano, se define a partir de la función de paso de Heaviside $H(H(x) = 1$ si $x > 0$ y $H(x) = 0$ si $x < 0$):

$$\xi_a^d = H(\bar{\lambda}_{ij} (u_i^d - u_j^d)). \quad (7)$$

La variable temporal indicada en la ecuación evolutiva (6) es ficticia ya que el problema bajo análisis es estacionario. La solución asintótica ($t \rightarrow \infty$) del sistema (4-6) corresponde al problema de equilibrio de usuario (ecuaciones 1-3). En efecto cuando $t \rightarrow \infty$, $\frac{dM_a^d}{dt} = 0$, lo

que en virtud de (6) implica que $M_a^d = g_a^d \xi_a^d / \tau_a \left(\sum_d g_a^d \xi_a^d \right)$ y entonces, desde (4) y (5) surge que se verifican las ecuaciones (1-3) correspondientes a u_i^{*d} y \bar{g}_a^* .

Las ecuaciones evolutivas (4-6) constituyen un sistema de $(Nn + Na) Nd$ ecuaciones para las variables indicadas. De todas maneras, este número puede ser muy importante para las modernas redes urbanas. Consecuentemente se presenta en la siguiente sección una manera de reducir tal problema.

2.3 Modelo continuo evolutivo de una red de transporte

Se divide el dominio completo de la ciudad Ω en N_m celdas de área $L_x L_y$, tal como se puede ver en la Figura 1a, donde las longitudes L_x y L_y son pequeñas con respecto a las dimensiones

de la ciudad. Se considera que el sentido de circulación en el arco a , en la dirección s , que forma un ángulo γ_a con el eje x , es desde el nodo i hacia el nodo j de acuerdo a la [Figura 1b](#).

Para transformar el sistema discreto (4-6) en un continuo se aplica el método de Galerkin, es decir la ecuación de continuidad (5) se multiplica por la variación δu_j^d , (con $\delta u_i^d = 0$), y se suma para todos los nodos:

$$\sum_i \sum_j M_a^d (u_i^d - u_j^d) \delta u_j^d + Q_j^d \delta u_j^d = 0 . \tag{8}$$

Esta expresión puede ser reordenada, después de multiplicar y dividir por el área de cada celda L^2 (con $L=L_x=L_y$), de la siguiente manera:

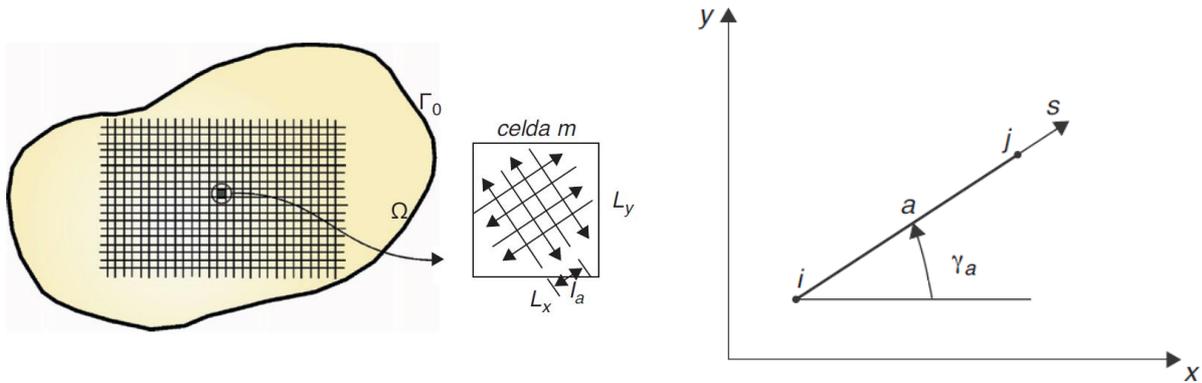


Figura 1: a) Discretización de la ciudad y sistema de calles en las celdas, b) Tramo de calle entre nodos y dirección y sentido de circulación.

$$\sum_{m \in \Omega} L^2 \left(\sum_{a \in m} \frac{-M_a^d (u_i^d - u_j^d) \delta (u_i^d - u_j^d)}{L^2} + \sum_{j \in m} \frac{Q_j^d}{L^2} \right) = 0 , \tag{9}$$

donde $\sum_{a \in m}$ y $\sum_{j \in m}$ corresponden a la sumatoria de todos los arcos y nodos respectivamente dentro de la celda m . Asumiendo que $u^d(x, y)$ se puede interpretar como una función continua, es posible expresar el tiempo de recorrido en un arco como:

$$u_i^d - u_j^d = -l_a \frac{\partial u^d}{\partial s} \quad \text{donde} \quad \frac{\partial u^d}{\partial s} = \frac{\partial u^d}{\partial x} c_a + \frac{\partial u^d}{\partial y} s_a , \tag{10a,b}$$

siendo l_a la longitud del arco a y $c_a = \cos \gamma_a$ y $s_a = \sin \gamma_a$. Suponiendo que u^d , $\partial u^d / \partial x$ y $\partial u^d / \partial y$ no varían dentro de la celda m , considerando su pequeñez respecto al dominio total, y tomando el límite cuando L^2 tiende a un diferencial de área de Ω , la expresión (9) puede aproximadamente ser expresada como:

$$\int_{\Omega} (f_x^d \delta u_x^d + f_y^d \delta u_y^d + q^d \delta u^d) d\Omega = 0 , \tag{11}$$

donde se han definido:

$$q^d = \sum_{j \in m} \frac{Q_j^d}{L^2}, \quad f_x^d = -k_x^d \frac{\partial u^d}{\partial x} - k_{xy}^d \frac{\partial u^d}{\partial y}, \quad f_y^d = -k_y^d \frac{\partial u^d}{\partial y} - k_{xy}^d \frac{\partial u^d}{\partial x}, \quad (12a,b,c)$$

siendo:

$$k_x^d = \sum_{a \in m} \frac{M_a^d c_a^2 l_a}{L^2}, \quad k_y^d = \sum_{a \in m} \frac{M_a^d s_a^2 l_a}{L^2}, \quad k_{xy}^d = \sum_{a \in m} \frac{M_a^d c_a s_a l_a}{L^2}. \quad (13a,b)$$

Debe observarse que f_x^d y f_y^d , así definidas, corresponden a la densidad de flujo vehicular en el continuo bidimensional que representa la ciudad, q^d corresponde a la tasa de generación de viajes por unidad de área, mientras k_x^d , k_y^d y k_{xy}^d corresponden a “conductividades vehiculares” dirigiéndose hacia el destino d . Si bien tales conductividades pueden variar de una celda a otra es posible, generalmente, identificar unas pocas regiones en una ciudad dentro de las cuales las celdas son similares, pudiéndose consecuentemente definir su topología urbana en términos de unos pocos tipos de arterias. En tal caso, las conductividades pueden ser reexpresadas de la siguiente manera:

$$k_x^d = \sum_{i \in m} M_i^d c_i^2 N_i \frac{l_i^2}{L^2}, \quad k_y^d = \sum_{i \in m} M_i^d s_i^2 N_i \frac{l_i^2}{L^2}, \quad k_{xy}^d = \sum_{i \in m} M_i^d c_i s_i N_i \frac{l_i^2}{L^2}, \quad (14a,b,c)$$

donde el subíndice i indica el tipo de arteria dentro de cada celda de una región considerada. Aplicando cálculo de variaciones sobre la expresión integral (11), y considerando (4), (6) y (12b,c), es posible obtener el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x^d \frac{\partial u^d}{\partial x} + k_{xy}^d \frac{\partial u^d}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y^d \frac{\partial u^d}{\partial y} + k_{xy}^d \frac{\partial u^d}{\partial x} \right) + q^d = 0, \quad (15a,b,c)$$

$$u^d|_{\Gamma_d} = 0, \quad f_n|_{\Gamma_0} = 0,$$

$$g_i^d = -M_i^d l_i \left(\frac{\partial u^d}{\partial x} c_i + \frac{\partial u^d}{\partial y} s_i \right), \quad M_i^d|_{(t+\delta)} = \frac{g_i^d \xi_i^d}{\tau_i} \lambda + M_i^d|_{(t)} (1-\lambda). \quad (16a,b)$$

Para obtener el sistema anterior, la derivada temporal de la ecuación (6) se ha aproximado mediante diferencias finitas implícitas, utilizando un incremento de paso de tiempo δ , el que luego fue reexpresado en términos del factor $\lambda: \delta = \lambda/(1-\lambda)$, donde $\lambda \in (0,1]$.

Debe observarse que las conductividades del modelo anterior dependen de la dirección y también de los sentidos de los flujos en cada celda. Se trata de un medio continuo anisótropo. El sistema gobernante (15-16) se resuelve de la siguiente manera: a) dada una aproximación para M_a^d , se obtienen las conductividades en cada región de la red mediante las expresiones (14); b) se obtienen valores de las funciones potenciales $u^d(x, y)$ mediante la resolución de los sistemas diferenciales lineales (15) usando el MEF; c) se obtienen los flujos g_a^d correspondientes a los diferentes tipos de arterias de cada región mediante (16a) y se actualiza

M_a^d a partir de (16b). Luego se procede a calcular las funciones potenciales para el siguiente paso de tiempo. Se continúa el proceso hasta la convergencia, determinado así la solución del problema de equilibrio de usuario: g_a^{*d} y $u^{*d}(x, y)$.

3 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Para validar el modelo propuesto se reanalizan ejemplos previamente presentados en (Cortínez y Dominguez, 2013). En primer lugar, se considera un dominio espacial de $2,9 \times 2,9 \text{ km}^2$ que se modela como una superficie delimitada por un borde externo en el caso continuo y como una red de arcos y nodos en el modelo discreto tradicional. La red se compone de 900 nodos y 1.740 enlaces de 100 m de longitud cada uno, formando calles perpendiculares entre sí con un solo sentido de circulación, tal como se puede ver en la Figura 2. Sobre esta red se analizan 2 situaciones diferentes, donde para todos los casos la expresión utilizada para el tiempo de arco (1) corresponde a la fórmula BPR (Boyles et al. 2022) $\tau_a = \tau_{a0} (1 + \alpha_a \bar{g}_a^* / C_a)^\varphi$, siendo $\tau_{a0} = 1/V_a$, V_a la velocidad máxima de circulación, C_a la capacidad del arco a y α_a y φ parámetros de ajuste:

a) *Modelo con un único destino.* Todos los viajes que se generan en la ciudad se dirigen al centro (que corresponde a los 4 nodos centrales de la Figura 2) y las características de las calles son iguales en las 2 direcciones y sentidos. La demanda es $q=750 \text{ veh/h/km}^2$ (para la formulación discreta a cada nodo le corresponde una demanda de 6.308 viajes dividido por el número de nodos). Los parámetros de BPR son: $V_a=60 \text{ km/h}$, $C_a=600 \text{ veh/h}$, $\alpha_a=0,15$ y $\varphi=2$.

b) *Modelo multidesestino con demanda fija.* Se consideran 2 centros diferentes con demandas $q^1=375 \text{ veh/h/km}^2$ y $q^2=375 \text{ veh/h/km}^2$ hacia los centros 1 y 2 (nodo 175 y 726 de la Figura 2, respectivamente). Para la formulación discreta a cada nodo le corresponde una demanda de $6.308/2$ viajes dividido por el número de nodos, $C_a=600 \text{ veh/h}$, $\alpha_a=0,15$ y $\varphi=2$.

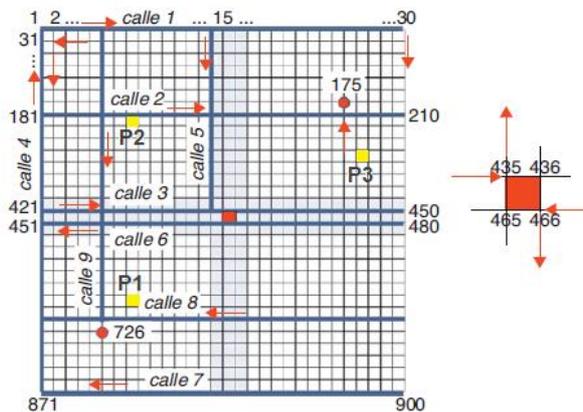


Figura 2: Esquema de calles, numeración de nodos de la red discreta y ubicación de puntos de evaluación.

Tales casos se han resuelto mediante: 1) el modelo continuo propuesto, ecuaciones (15-16), y 2) el enfoque discreto evolutivo, ecuaciones (4-6). Para la formulación del modelo continuo se ha tenido en cuenta que en cada celda se tienen cuatro tipos de arcos, dos en una dirección en ambos sentidos y otros dos tipos de arcos en una dirección perpendicular con ambos sentidos. Asimismo, se ha supuesto que hay tantos arcos en un sentido como en el opuesto. En tal caso, el factor N_{il}^2/L^2 de las fórmulas (14) adopta el valor de $1/2$ (independizándose del tamaño de la celda). En la Figura 3 se muestran los resultados comparativos para el caso a). La Figura 3a corresponde al tiempo de viaje desde cada nodo de las calles 1 a 3 hasta el

centro, apreciándose que ambos enfoques conducen a valores muy cercanos. Lo mismo puede decirse respecto a los flujos vehiculares en cada tramo. Así, la [Figura 3b](#) muestra tales magnitudes para la calle 3. Las diferencias entre los resultados brindados por ambos modelos son casi indistinguibles. La [Figura 3c](#) muestra que 6 iteraciones son suficientes para la convergencia del modelo continuo (P1, P2 y P3 puntos indicados en la [Figura 2](#)).

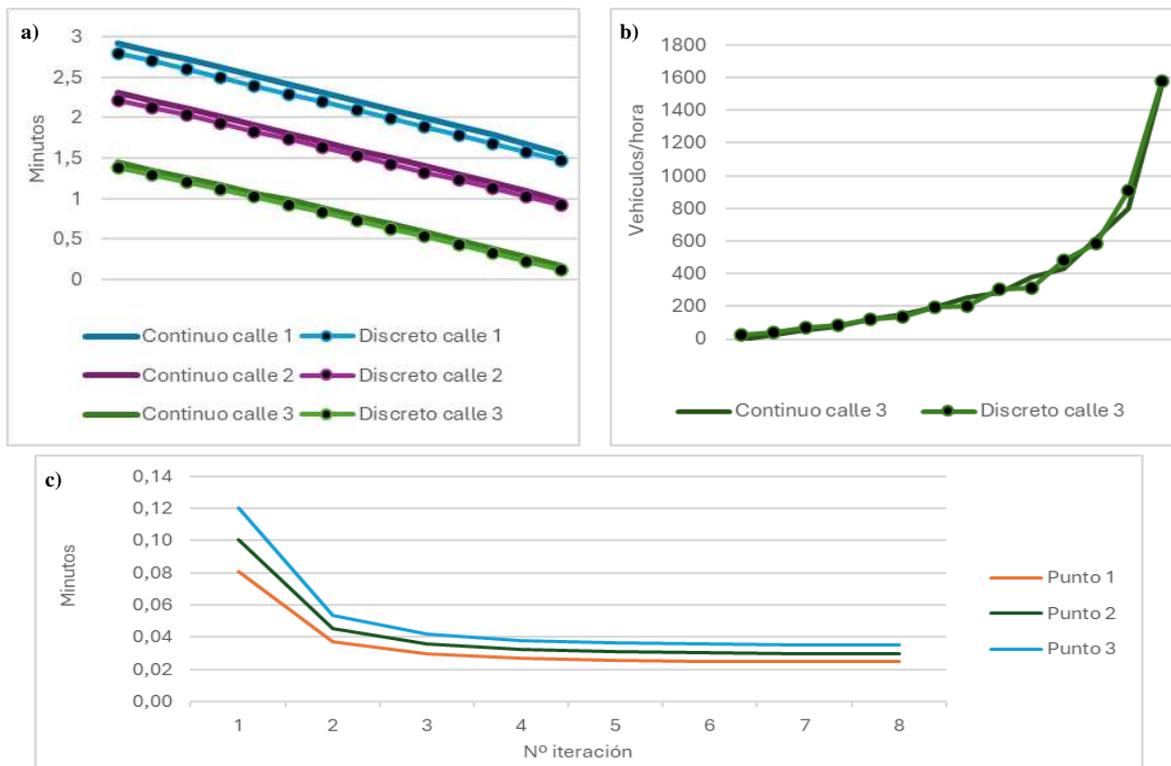


Figura 3: a) Tiempo de viaje desde cada nodo de las calles 1 a 3 hasta el centro, b) Flujo de vehículos en cada tramo de la calle 3, c) Convergencia evaluada en 3 puntos dentro del dominio.

La [Figura 4](#) corresponde al *caso b*), y muestra el tiempo de viaje en la calle 3 hasta los centros 1 y 2 ([Figura 4a](#)) y los flujos en arcos de la calle 9 ([Figura 4b](#)), respectivamente. En este caso multicentro también se obtienen diferencias indistinguibles entre los valores de los modelos discreto y continuo.

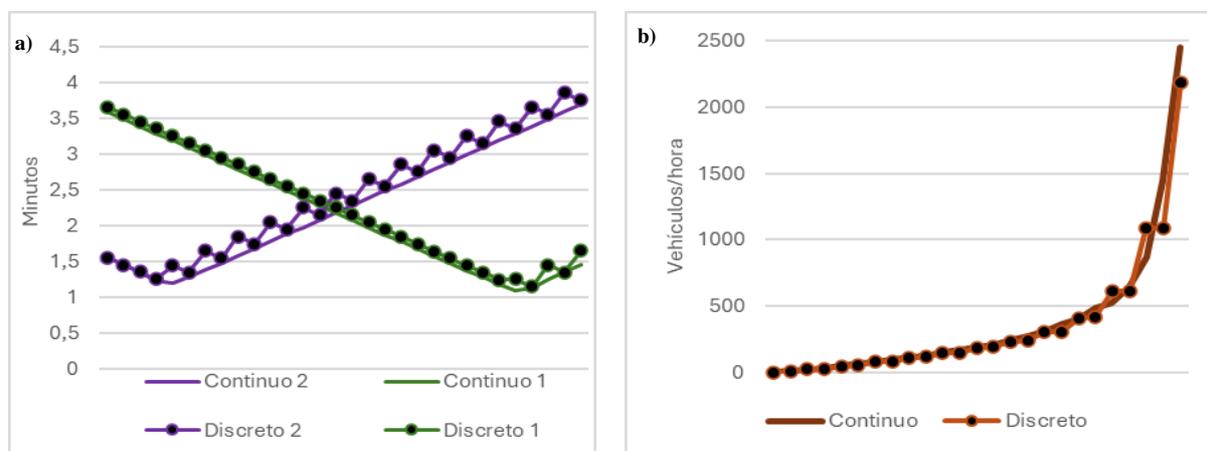


Figura 4: a) Tiempo de viaje en la calle 3 hasta los centros 1 y 2, b) Flujos en arcos de la calle 9.

A continuación, se considera un problema de competencia de instalaciones donde 4 establecimientos compiten entre sí por la captura de clientes. Tales instalaciones pueden corresponder a centros comerciales, establecimientos educativos, etc. En este problema la demanda generada en cada punto de la ciudad se dirige hacia un solo destino que el usuario selecciona según el criterio de mínimo tiempo de viaje. La red de tráfico urbana considerada se muestra en la [Figura 5a](#) y tiene $35 \times 25 \text{ km}^2$, aproximadamente. Se distinguen 3 zonas con diferentes características relativas a demandas de viajes, configuración de calles y velocidades de circulación máxima, siendo para cada una las siguientes: Zona 1: $\gamma_1=0^\circ$ $\gamma_2=90^\circ$, $V_{a1}=70 \text{ km/h}$, $V_{a2}=40 \text{ km/h}$, $q=750 \text{ vel/h/km}^2$, Zona 2: $\gamma_1=45^\circ$ $\gamma_2=135^\circ$, $V_{a1}=40 \text{ km/h}$, $V_{a2}=60 \text{ km/h}$, $q=350 \text{ vel/h/km}^2$, Zona 3: $\gamma_1=30^\circ$ $\gamma_2=120^\circ$, $V_{a1}=60 \text{ km/h}$, $V_{a2}=40 \text{ km/h}$, $q=350 \text{ vel/h/km}^2$. En las tres zonas se adoptan los siguientes parámetros $\phi=2$, $\alpha=0.15$.

Los cálculos realizados han mostrado que, para este caso de complejidad geométrica ligeramente mayor, se obtiene la convergencia en 10 iteraciones como se observa en la [Figura 5b](#). En la [Figura 5c](#) se muestran a título ilustrativo las curvas de nivel obtenidas para el tiempo de viaje desde cada punto hasta el destino correspondiente. Pueden apreciarse también las regiones de atracción de cada centro. Los valores obtenidos en este trabajo comparan favorablemente con los de la referencia ([Cortínez y Domínguez, 2013](#)).

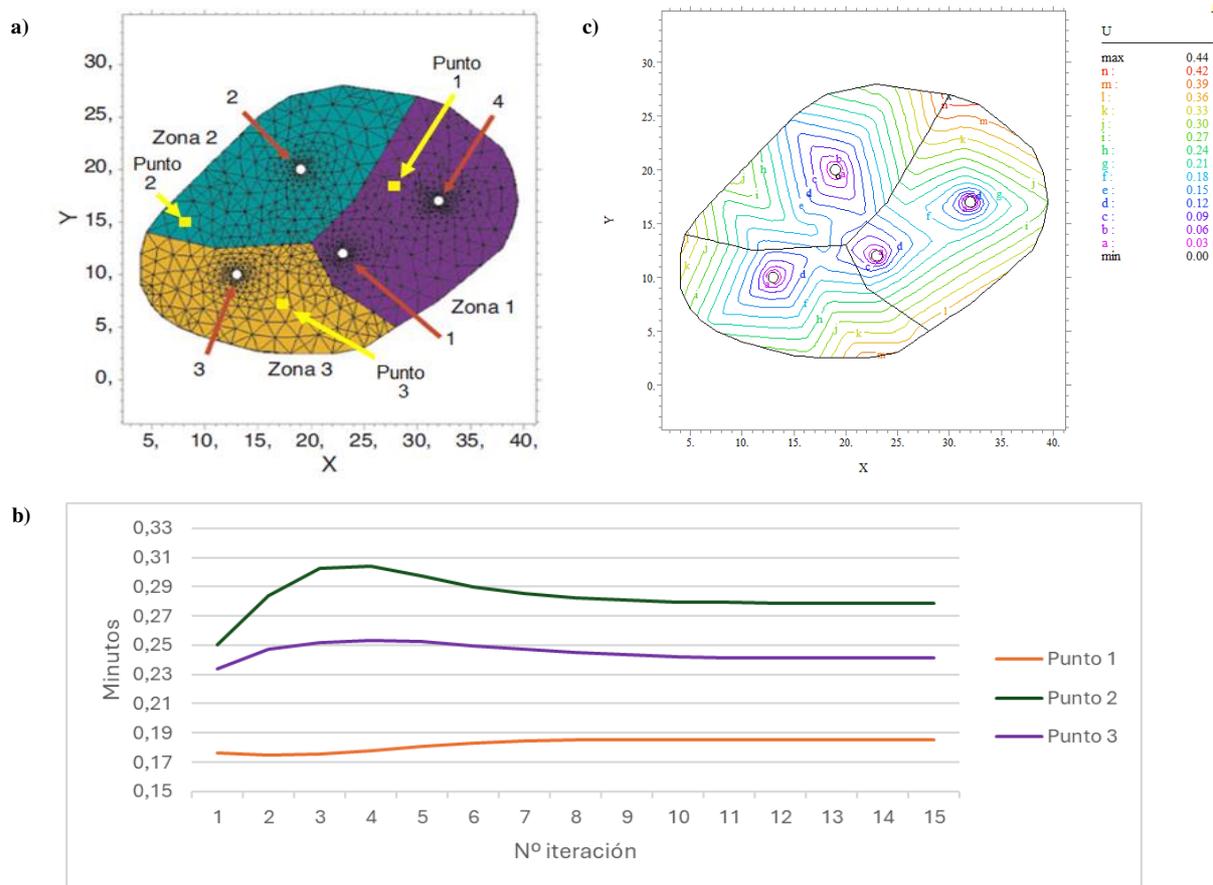


Figura 5: a) Competencia de instalaciones: Zonas, centros de la ciudad y puntos de evaluación, b) Convergencia evaluada en 3 puntos dentro del dominio, c) Competencia de instalaciones: Tiempo de viaje (horas).

4 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un modelo continuo evolutivo de una red de transporte urbana congestionada. Tal modelo corresponde a una reformulación del enfoque continuo presentado

previamente por los autores. El modelo actual en conjunto con el MEF permite obtener de manera eficiente y robusta los flujos vehiculares en una red urbana, así como los tiempos de viaje de los usuarios con una precisión similar al clásico modelo discreto.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue auspiciado por la SCyT de la Universidad Tecnológica Nacional, el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur y el CONICET.

REFERENCIAS

- Boyles, S.D., Lowmes, N. E. y Unnicrishan, A., *Transportation network Analysis*, volumen I. Ver. 0.90, <https://sboyles.github.io/blubook.html>, 2022.
- Ferris, M., Meerus, A y Rutherford, T., Computing Wardropian equilibria in a complementarity framework. *Optimization Methods and Software*, volumen X, 5, 669–685, 1999.
- Xu, S., Jiang, W., Deng, X. Y. y Shou, Y., A modified Physarum-inspired model for the user equilibrium traffic assignment problem, *Applied Mathematical Modelling* 55:340–353, 2018.
- Dominguez, P.N., Stoklas, C.I. y Cortínez, V.H., Un Enfoque de Elementos Finitos para el Problema Generalizado de Asignación de Tráfico. *Mecánica Computacional*, 38:1427–1436, 2021.
- Dominguez, P.N., Peinado, M.L. y Cortínez, V.H., Diseño de redes de transporte urbano, *Mecánica Computacional*, 40:1117-1126, 2023.
- Sasaki T., Iida Y., y Yang H., User equilibrium traffic assignment by continuum approximation of network flow. *11th International Symposium of Transportation and Traffic Theory*, 233-252. Yokohama, Japan, 1990.
- Du, Y., Wong, S. y Sun, L.J. A Multi-Commodity Discrete/Continuum model for a traffic equilibrium system. *Transportmetrica A: Transport Science*, 12 (3): 249–271, 2016.
- Dominguez, P.N. Un nuevo modelo continuo de asignación de tráfico para el diseño óptimo de redes de transporte urbano. *Tesis doctoral, Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur*, 2013.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N., Un modelo de difusión anisótropa para el estudio del tráfico urbano. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 29(1):1–11. 2013.
- Cortínez, V.H. y Dominguez, P.N. An anisotropic continuum model for traffic assignment in mixed transportation networks. *Applied Mathematical Modelling*, 50: 340–350, 2017.