

UNA GENERALIZACIÓN DEL ALGORITMO PHYSARUM PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE TRÁFICO URBANO

A GENERALIZATION OF THE PHYSARUM ALGORITHM FOR SOLVING THE URBAN TRAFFIC ALLOCATION PROBLEM

Patricia N. Dominguez^{a,b}, Víctor H. Cortínez^{a,b,c} y María L. Peinado^{a,b}

^a*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, B.Blanca, Argentina, pdoming@uns.edu.*

^b*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada, Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional, 11 de abril 461, Argentina; vcortine@hotmail.com*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET*

Palabras clave: Asignación de tráfico urbano, congestión, costos no locales, restricción de capacidad, algoritmo Physarum.

Resumen. En este trabajo se propone un modelo evolutivo discreto, desarrollado a partir del enfoque Physarum, para abordar el problema de la asignación de tráfico en redes urbanas. Se presta especial atención a dos aspectos clave: a) la restricción de capacidad en las vías de comunicación, garantizando que no se generen flujos no factibles y b) la consideración de funciones de costo no locales, las cuales tienen en cuenta, no solamente el flujo vehicular propio de cada arco, sino también la influencia de otros arcos dentro de la red. Se detalla la formulación matemática del problema y se incluyen ejemplos que demuestran la eficiencia del enfoque propuesto.

Keywords: Urban traffic assignment, congestion, non-local costs, capacity constrain, Physarum algorithm.

Abstract. In this work, a discrete evolutionary model, developed from the Physarum approach, is proposed to address the traffic assignment problem in urban networks. Special attention is given to two key aspects: a) the capacity constraints on communication routes, ensuring that no infeasible flows are generated, and b) the consideration of non-local cost functions, which take into account not only the vehicular flow of each arc but also the influence of other arcs within the network. The mathematical formulation of the problem is described, and examples are presented to demonstrate the efficiency of the proposed approach.

1 INTRODUCCIÓN

Las actividades relacionadas al diseño de redes y planificación del transporte urbano se basan, en gran medida, en el denominado problema de asignación. Éste consiste en predecir el flujo de vehículos por hora en cada tramo de la red de transporte a partir del conocimiento de la tasa de generación de viajes en cada nodo de la red hacia diferentes destinos y de las características y topología de la misma. El enfoque clásico para resolver el problema corresponde a uno de optimización en gran escala para redes urbanas extensas (Boyles et al., 2022). Dada la importancia del problema, es de interés técnico-científico el desarrollo de enfoques alternativos, buscando mayor eficiencia en la solución computacional. En tal sentido, en años recientes, se ha propuesto un enfoque, basado en una analogía biológica, denominado algoritmo Physarum. Se trata de un método iterativo con buenas propiedades de convergencia para resolver un sistema algebraico de ecuaciones no lineales (Xu et al., 2018). Este método ha mostrado eficiencia para resolver problemas convencionales de asignación, es decir aquellos donde se han utilizado hipótesis simplificativas para facilitar la aplicación de algunas técnicas de optimización conocidas (Cortínez y Dominguez, 2021; Dominguez et al., 2021 y 2023). Entre estas simplificaciones pueden citarse: a) la omisión de la capacidad máxima de las calles y b) el uso de funciones de tiempo de recorrido de tramo dependientes únicamente del flujo sobre el mismo (funciones de costo locales) (Bagloee et al., 2017; Huang et al., 2022). Tales simplificaciones se usan habitualmente para facilitar la utilización de técnicas basadas en gradiente, tales como la clásica de Frank-Wolfe. Sin embargo, desde el punto de vista físico, es un hecho más realista tener en cuenta que cada arco tiene una capacidad máxima por lo que ciertos valores de flujo no pueden ser superados. Cuando tal restricción no es tomada en cuenta, sus resultados muestran frecuentemente valores de flujo que son artificialmente altos, sobre todo en los arcos más congestionados.

De igual manera, la suposición de que el costo de cada arco depende únicamente del flujo sobre el mismo, si bien es muy útil desde el punto de vista de la eficiencia numérica, no refleja con precisión la realidad de la problemática ya que claramente los flujos “aguas abajo” del arco considerado y los transversales pueden influir en la velocidad de circulación.

En este trabajo, se presenta una formulación generalizada del enfoque Physarum para considerar los efectos tanto de restricción de capacidad como de la existencia de funciones de costo no locales. Se presenta la formulación matemática del problema y se brindan algunos ejemplos para mostrar la eficiencia del enfoque propuesto.

2 PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE TRÁFICO: FORMULACIÓN MIXTA MULTIDESTINO

Se estudia el tráfico en una ciudad a una hora determinada del día (estado estacionario), que puede ser la hora pico, durante la cual se produce congestionamiento en muchas de las arterias o calles de la misma. La red de tráfico se representa esquemáticamente como un grafo dirigido de nodos j ($j=1,2,\dots,Nn$), que representan centros de zonas y que constituyen los orígenes y destinos de viajes, y un grupo de arcos a ($a=1,2,\dots,Na$) que conectan dichos nodos y representan la disponibilidad vial y la posibilidad de movimiento vehicular entre dichas zonas (Figura 1a). El sentido permitido en cada arco a uniendo los nodos i y j se define mediante un indicador $\bar{\lambda}_{ij}$ que vale 1 si la dirección permitida es de i hacia j y vale -1 si es en sentido contrario.

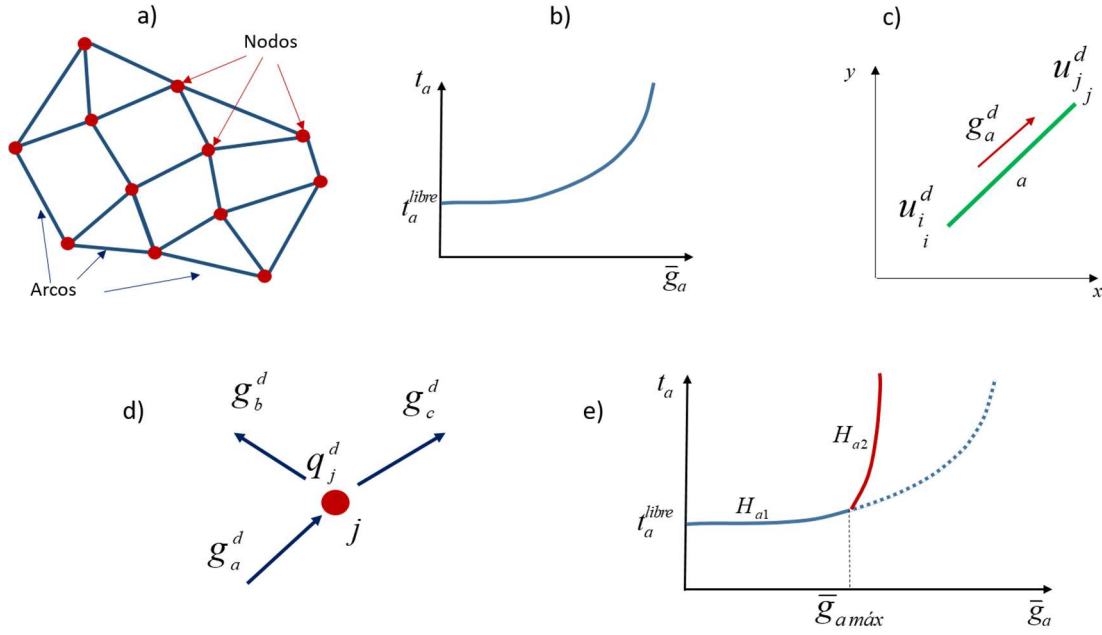


Figura 1: a) Esquema básico de una red de transporte, b) función de costo local en un arco, c) un arco entre nodos, d) flujos concurrentes en un nodo de la red, e) función de costo con restricción de capacidad

El problema de asignación de tráfico consiste en determinar los flujos vehiculares horarios, g_a^d (veh/h) en cada segmento a de la red de tráfico dirigiéndose a cada uno de los centros de destino d ($d=1, 2, \dots, Nd$), y los tiempos de viaje u^d hacia dichos destinos, suponiendo conocida la estructura de la red de tráfico y las tasas horarias de viajes $q^d(x, y)$ (veh/h) generados en la ciudad para los usuarios que se dirigen hacia el destino d .

2.1 Formulación mixta multidesestino clásica

El flujo total en cada tramo de la red es igual a la suma de los flujos que utilizan el arco dirigiéndose a cada destino:

$$\bar{g}_a = \sum_{d=1}^{Nd} g_a^d \quad (1)$$

El efecto de la congestión de tráfico urbano se puede medir a través del tiempo necesario t_a (horas) para transitar un segmento de ruta (por ejemplo, una cuadra). Se determina empíricamente que, en general, este tiempo aumenta conforme lo hace el flujo horario de vehículos por tal tramo (Figura 1b). La expresión analítica, denominada generalmente “función de costo”, tiene la siguiente forma:

$$t_a = H_a(\bar{g}_a) \quad (2)$$

La función creciente $H_a(\bar{g}_a)$ se puede expresar empíricamente de varias maneras, siendo una de las más utilizadas la conocida fórmula BPR (Sheffi, 1985):

$$t_a = l_a / V_a \left(1 + \alpha (\bar{g}_a / C_a)^\varphi \right) \quad (3)$$

donde l_a y V_a corresponden a la longitud y a la velocidad máxima del tramo a , C_a es una constante denominada capacidad nominal del tramo a y α y φ son constantes empíricas.

Según el primer principio de Wardrop (Cortínez y Dominguez, 2017) se puede

expresar el tiempo de viaje u^d desde un punto genérico (x,y) del entramado urbano hasta el destino d como $u^d = u^d(x,y)$, siendo por definición $u^d(x_d, y_d) = 0$, donde x_d e y_d corresponden a las coordenadas del destino d . En consecuencia, el tiempo de recorrido del tramo para un conductor dirigiéndose hacia tal destino será igual a la diferencia que adopta la función potencial $u^d(x,y)$ entre los puntos inicial y final del mismo, i y j respectivamente (Figura 1c), es decir:

$$t_a = u_i^d(x_i, y_i) - u_j^d(x_j, y_j) \quad (\text{si } u_i^d > u_j^d \text{ y } g_a^d > 0) \quad (4)$$

A partir de (2) y de (4) puede inferirse que el tiempo de circulación en el arco a puede obtenerse por el decrecimiento de la función potencial correspondiente a cualquiera de los destinos.

Para formular el problema de asignación de tráfico debe considerarse, además de las relaciones previas, la ley de conservación de vehículos, es decir que la cantidad de vehículos entrando y saliendo de un nodo es una cantidad conservativa. Por lo tanto, es posible formular las siguientes ecuaciones de continuidad para cada uno de los nodos de la red:

$$\sum_{a \in M_j} \pm g_a^d + q_j^d = 0 \quad j = 1, 2, \dots, Nn \quad d = 1, 2, \dots, Nd \quad (5)$$

donde M_j corresponde a la cantidad de enlaces vinculados al nodo j (Figura 1d). En (5) el signo $+$ ($-$) se aplica cuando los flujos entran (salen) al (del) nodo j .

El sistema anterior puede ser reformulado de una manera más conveniente para el enfoque numérico utilizado en este trabajo (Cortínez y Dominguez, 2017). Para ello, se multiplica y se divide el primer término de (5) por t_a y se considera (4) en el numerador, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\sum_{i \in P_j} \xi_a^d \frac{g_a^d}{H_a(\sum g_a^d)} (u_i^d - u_j^d) + q_j^d = 0, \quad \xi_a^d = \begin{cases} 1 & \bar{\lambda}_{ij}(u_i^d - u_j^d) > 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_{ij}(u_i^d - u_j^d) \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

donde P_j corresponde al conjunto de nodos i vinculados al nodo j . El coeficiente ξ_a^d que se ha incorporado en (6) asegura que el tiempo de viaje decrezca en la dirección permitida (esto sustituye los signos $+$ y $-$ de la ecuación (5)). Debe observarse que por consistencia entre (5) y (6) es posible expresar la siguiente identidad:

$$g_a^d = \xi_a^d \frac{g_a^d}{H_a(\sum g_a^d)} (u_i^d - u_j^d) \quad (7)$$

Las ecuaciones (6-7) junto con las condiciones $u^d(x_d, y_d) = 0$, constituyen un sistema gobernante algebraico no lineal con $Nd(Nn + Na)$ incógnitas: g_a^d y u_j^d . Una vez resuelto tal sistema, se pueden obtener los tiempos de viaje en cada arco t_a a partir de (4) y los flujos totales en cada arco mediante (1). La formulación presentada se denomina “mixta multidesino” pues distingue a los usuarios para cada destino y las incógnitas corresponden tanto a flujos como a funciones potenciales (tiempos de viajes).

2.2 Formulación mixta multidestino extendida

La formulación mixta multidestino explicada previamente puede extenderse para considerar: a) la existencia de funciones de costo no locales y b) el efecto de restricción de capacidad de cada arco. Se muestra a continuación que ambos efectos pueden ser incorporados en la formulación previa, simplemente generalizando las expresiones de las funciones de costo H_a en (2).

Así, si se pretende restringir el flujo máximo $\bar{g}_{a \text{ máx}}$ que puede soportar cada arco, es posible modificar la función de costo cuando tal valor es sobrepasado, aumentando bruscamente sus valores, como se muestra en la [Figura 1e](#). En efecto, si se supera el flujo máximo establecido, la función H_a adopta valores muy altos y, en virtud del primer principio de Wardrop, los flujos tienden a redistribuirse por caminos de menor tiempo de recorrido. Es decir:

$$H_a = \begin{cases} H_{a1} & \text{si } \bar{g}_a \leq \bar{g}_{a \text{ máx}} \\ H_{a2} & \text{si } \bar{g}_a > \bar{g}_{a \text{ máx}} \end{cases} \quad (8)$$

Donde H_{a1} viene dada por la expresión (3), mientras que para H_{a2} existen varias posibilidades, una de las cuales se describe en la sección de ejemplos numéricos.

Por otra parte, debe observarse que la función de costo H_a de la formulación previa podría depender de todos los flujos de la red y no solamente del correspondiente al tramo a considerado, es decir podría ser una función de costo no local. En particular, cuando se pretende modelar un tramo de doble mano mediante dos arcos a y a' desde el nodo i hacia el nodo j , y desde j hacia i respectivamente, teniendo en cuenta la interacción entre ellos y, además, con otros flujos $\bar{g}_b$ de los tramos adyacentes a los nodos i, j , la expresión de la función de costo del arco a dirigiéndose de i hacia j puede ser expresada mediante (2) aunque contemplando el flujo efectivo $\bar{g}_a^*$:

$$t_a = H_a(\bar{g}_a^*) \quad (9)$$

donde:

$$\bar{g}_a^* = \bar{g}_a + \beta_1 \bar{g}_{a'} + \beta_2 \sum_{b \in M_i} |\bar{g}_b| + \beta_3 \sum_{b \in M_j} |\bar{g}_b| \quad (10)$$

siendo β_1, β_2 y β_3 constantes empíricas.

3 ALGORITMO ITERATIVO PHYSARUM

El sistema (6-7) puede resolverse eficientemente mediante el enfoque Physarum ([Dominguez et al., 2023](#)). Tal metodología se basa en aproximar, en dicho sistema, $g_a^d \xi_a^d$ y H_a en (6) y en (7) por D_a^d y por L_a , respetivamente. En consecuencia, el sistema (6-7) puede expresarse aproximadamente como:

$$\sum_{i \in P_j} \frac{D_a^d}{L_a^d} (u_i^d - u_j^d) + q_j^d = 0, \quad (11)$$

$$g_a^d = \frac{D_a^d}{L_a^d} (u_i^d - u_j^d) \quad (12)$$

La expresión (11) corresponde a un sistema de ecuaciones lineales, para cada destino d . Una vez resuelto este sistema para todos los centros (habiendo impuesto previamente las condiciones $u^d(x_d, y_d) = 0$), los flujos en cada tramo a dirigiéndose hacia d pueden ser obtenidos en función de u_i^d mediante las expresiones (12). Éstas, constituyen nuevas aproximaciones para los flujos de tramo por lo que se las notará como $g_a^{d,nueva}$. De la misma manera, con los u_i^d obtenidos se actualizan ξ_a^d que se denominan $\xi_a^{d,nueva}$. A continuación se actualizan D_a^d y L_a^d de la siguiente manera:

$$D_a^{d,nueva} = (D_a^d + \xi_a^{d,nueva} g_a^{d,nueva}) / 2 \quad (13)$$

$$L_a^{nueva} = \left(\eta L_a + H_a \left(\sum_d g_a^{d,nueva} \xi_a^{d,nueva} \right) (1 - \eta) \right) \quad (14)$$

Las ecuaciones (11-14) se aplican iterativamente. Como se ha mostrado en la referencia Dominguez et al. (2023), tal esquema converge a la solución del sistema (6-7). En la expresión (14) $\eta \in (0,1)$ y la elección de dicho valor se adopta de manera tal de obtener una convergencia eficiente. Es importante mencionar que la misma se logra independientemente de la aproximación inicial para D_a^d y L_a^d .

4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

La metodología desarrollada, se ejemplifica a través de su aplicación a la red mostrada en la Figura 2, compuesta por 12 nodos, siendo cada uno de ellos, origen y destino de viajes. Entre cada par de nodos existe una calle de doble sentido de circulación que se modela mediante dos arcos dirigidos ($i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$). Así queda conformada una red de 50 arcos, cuyas longitudes (en km) se muestran entre paréntesis en la Figura 2a. Para la función de tiempo de viaje, se adoptó la fórmula (3) donde la capacidad C_a de todos los arcos se fijó en 800 veh/h, la velocidad de circulación a flujo libre V_a (sin congestión) es de 60 km/h, $\alpha = 0.15$ y $\varphi = 4$. En la Figura 2b se muestran las tasas de generación de viajes (veh/h) entre nodos (matriz origen-destino).

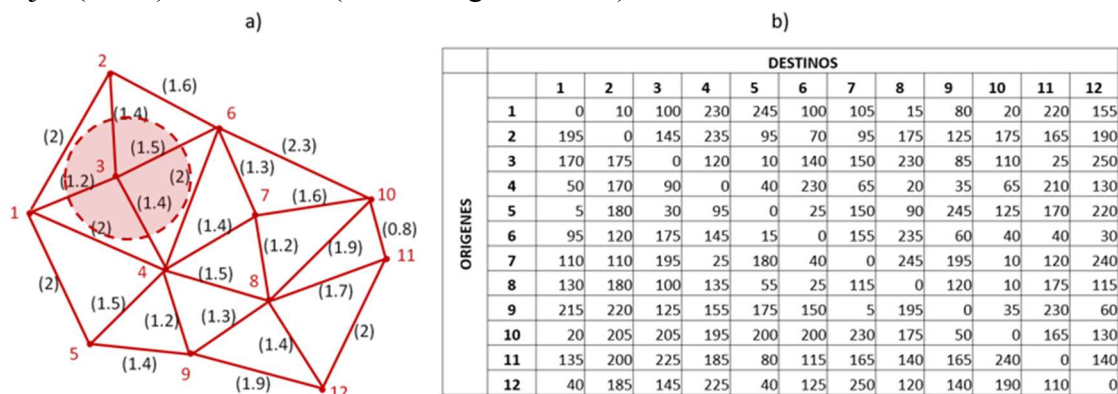


Figura 2: a) Esquema de la red de tráfico y b) matriz origen-destino de viajes.

4.1 Efecto de costos no locales

Se estudian dos casos: Caso 1) se considera el efecto de la interacción en los flujos en ambos sentidos para cada arco ($\beta_1 = 0.1, \beta_2 = \beta_3 = 0$ en la expresión (10)) y Caso 2) el efecto de la interacción entre los flujos en la misma dirección y sentido contrario y aquellos correspondientes a los de los arcos adyacentes a los nodos del tramo. En este caso, se consideraron los arcos en la zona aledaña al nodo 3, es decir arcos que relacionan los nodos 1, 2, 4 y 6 con dicho nodo, para los cuales en la expresión (10) los valores adoptados son $\beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0.05$ y $\beta_3 = 0$ para los arcos salientes del nodo 3 y $\beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0$ y $\beta_3 = 0.05$ para los arcos que llegan a dicho nodo.

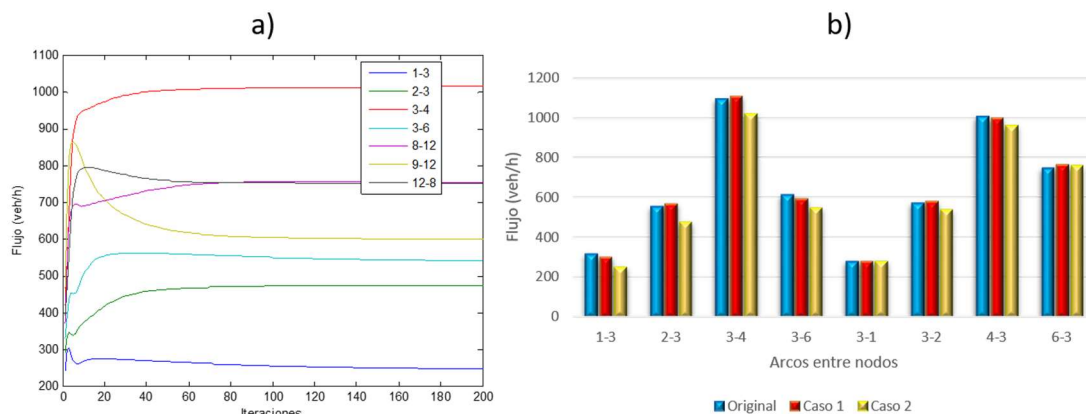


Figura 3: a) Convergencia de flujos para el Caso 2, b) comparación de flujos obtenidos en los Casos 1 y 2 con los originales.

En la Figura 3a se observa la convergencia de los flujos para el Caso 2, siendo necesarias aproximadamente 100 iteraciones (0.03 seg. de cálculo). Tal convergencia es similar para el Caso 1. En la Figura 3b se muestra una comparación de los flujos obtenidos para los casos mencionados con respecto al caso de referencia (original) en el cual se contemplan solamente costos locales. Asimismo, en la Figura 4a se muestra la relación entre el tiempo de recorrido de arco y el tiempo a flujo libre para los mismos casos. Como se puede apreciar, si bien no existe una variación significativa del flujo en los arcos (Figura 3b), el tiempo de viaje sí aumenta de manera notable al contemplar el efecto del costo no local en los arcos más congestionados (3-4, 4-3 y 6-3), sobre todo para el Caso 2, alcanzándose en algunos arcos aumentos cercanos al 20%. En el mismo sentido, en la Figura 4b se muestra el porcentaje de incremento del tiempo de viaje total u entre diferentes nodos de la ciudad (incluyendo varios arcos en el recorrido) para los Casos 1 y 2, con respecto al caso original (considerando solamente costos locales). Como se puede apreciar, el tiempo de viaje total entre ciertos puntos de origen y destino puede diferir hasta casi 20% si se consideran o no los costos no locales.

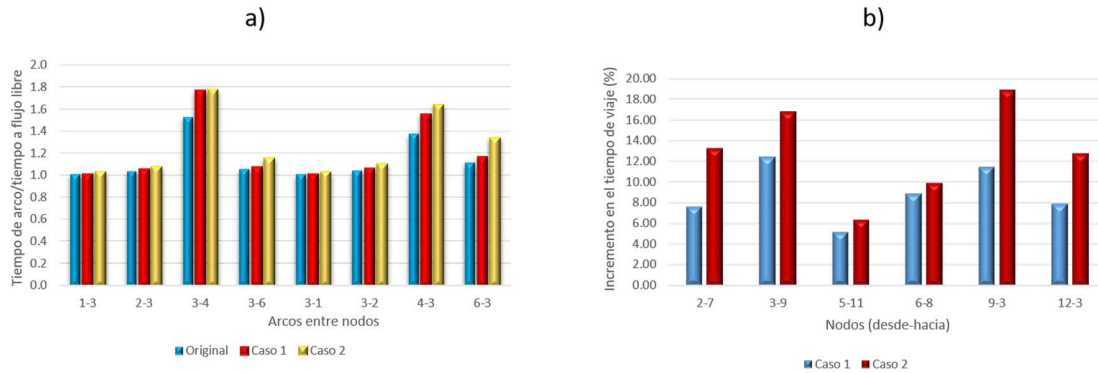


Figura 4: a) comparación de tiempos de recorrido de arco/tiempos de arco a flujo libre, b) Incremento en los tiempos totales de viaje entre diferentes nodos de la red con respecto al caso original.

4.2 Efecto de la restricción de capacidad de los arcos

Se estudia a continuación la red de la Figura 2, aunque considerando ahora una capacidad máxima de 960 veh/h para cada uno de los arcos. En primer lugar se ha resuelto el problema de asignación bajo la hipótesis de costos locales sin considerar restricción de la capacidad. Como puede apreciarse en la Figura 5a en varios de sus enlaces la capacidad de la vía es superada. En efecto, en los arcos entre los nodos ver 3-4, 6-7, 7-8, 6-2, 4-3, 10-6 y 11-10 los flujos vehiculares superan la capacidad del arco. Para que la predicción no muestre estos valores irreales se resuelve el problema usando la fórmula generalizada (8) en la cual se ha adoptado como función H_{a2} una recta que pasa por los puntos $(\bar{g}_{a\text{ máx}}, H_{a1}(\bar{g}_{a\text{ máx}}))$ y $(1.08\bar{g}_{a\text{ máx}}, 10t_{a0})$.

Para aplicar el enfoque Physarum se ha utilizado, en primer lugar (Caso 3), la fórmula de actualización (13) con $\eta = 0.5$. Como se puede apreciar en la Figura 6a no existe una convergencia perfecta sino una convergencia a valores medios con oscilaciones pequeñas alrededor de los mismos. Aproximadamente con 40 iteraciones se alcanza la convergencia de los valores medios que respetan la restricción de 960 veh/h.

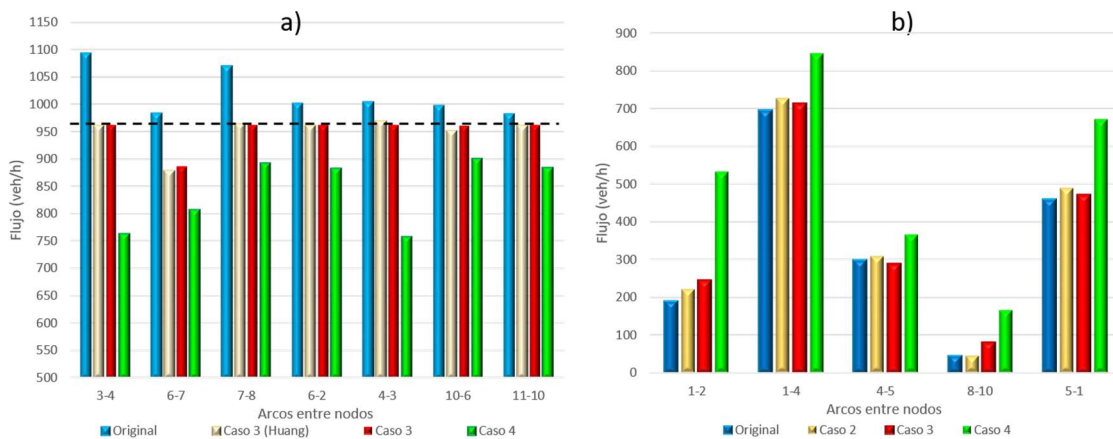


Figura 5: a) comparación de flujos con restricción de capacidad, b) redistribución de flujos vehiculares

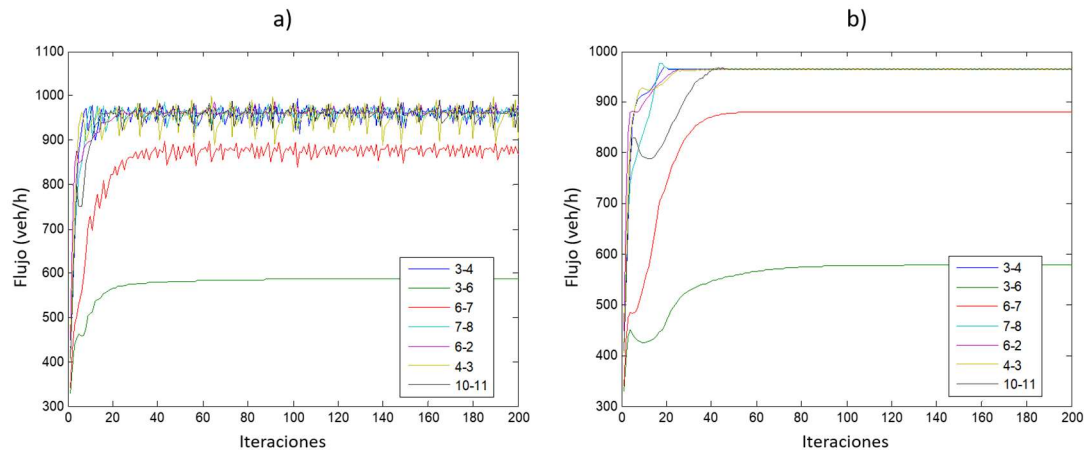


Figura 6: Convergencia de flujos para el Caso 3, a) con $\eta = 0.5$ y b) con $\eta = 0.8$.

Un mejor comportamiento de convergencia puede obtenerse adoptando en la expresión (13) un valor de $\eta = 0.8$. Con este valor, la actualización es algo más suave puesto que el mayor peso de la misma va sobre el valor anterior de L_a . En este caso, como se observa en la Figura 6b la convergencia es muy buena, prácticamente sin oscilaciones, aunque alcanzándose la misma en 60 iteraciones. Todos los valores obtenidos cumplen con la restricción impuesta.

Existe otra manera de utilizar el método Physarum con restricción de capacidad, desarrollado por Huang et al., 2022, que se ha aplicado aquí al Caso 3. En la Figura 7a se muestra la convergencia del método, que, como puede apreciarse, se logra en la media y en mayor número de iteraciones (aproximadamente 300), existiendo oscilaciones en algunos de los arcos. Por lo tanto, de acuerdo a los resultados obtenidos, el enfoque presentado en este trabajo con un valor de $\eta = 0.8$ resulta más eficiente que este último.

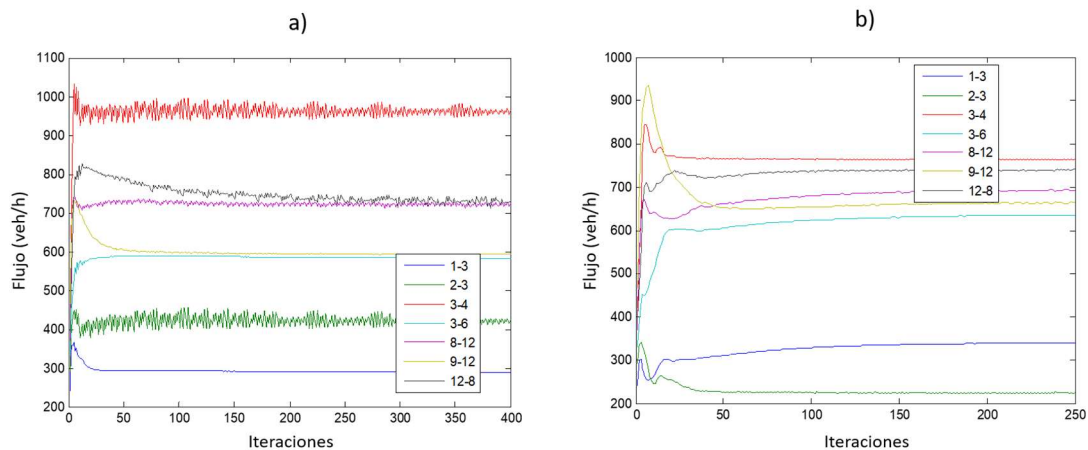


Figura 7: a) Convergencia para el Caso 3 con el método de Huang, b) Convergencia para el Caso 4.

4.3 Efecto simultáneo de la restricción de capacidad y costos no locales de los arcos

Aplicando simultáneamente la restricción de capacidad del caso anterior (Caso 3) y las funciones de costo no locales (Caso 2), se analizó nuevamente la red de la Figura 2 (Caso 4). En este caso la convergencia también se logra en la misma cantidad de iteraciones que en el Caso 3 con fluctuaciones prácticamente imperceptibles (Figura 7 b). Como se puede apreciar en las Figuras 5a y 5b, en este caso se produce una redistribución más marcada de flujos en algunos arcos que para los Casos 2 y 3, reduciéndose en los arcos más

congestionados y aumentando en otros.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha propuesto una extensión del método evolutivo (iterativo) Physarum, para resolver el problema de asignación de tráfico en redes urbanas congestionadas, considerando costos no locales y restricción de capacidad. Se han presentado ejemplos numéricos para ilustrar la adecuada convergencia del enfoque propuesto.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue auspiciado por el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur, la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, y el CONICET.

BIBLIOGRAFIA

- Bagloee, S.A., Sarvi, M., Patriksson, M. y Rajabifard, A. A mixed user-equilibrium and system-optimal traffic flow for connected vehicles stated as a complementarity problem, *Computer-aided civil and infrastructure engineering* 32, 7, 562-580, 2017.
- Boyles, S.D., Lownes, N. E. y Unnicrishan, A. *Transportation network Analysis* Vol. I. Ver. 0.90, <https://sboyles.github.io/blubook.html>, 2022.
- Cortínez, V. H. y Dominguez, P. N. An anisotropic continuum model for traffic assignment in mixed transportation networks. *Applied Mathematical Modelling* 50, 340-353, 2017.
- Cortínez, V. H. y Dominguez, P. N. A finite element approach for the traffic assignment problem. *Transportation Research Procedia* 58, 13–20, 2021.
- Dominguez, P. N., Cortínez, V. H. y Stoklas, C. I. Un enfoque de elementos finitos para el problema generalizado de asignación de tráfico, *Mecánica Computacional XXXVIII*, 1427-1436, 2021.
- Dominguez, P. N., Peinado, M. L. y Cortínez, V. H. Diseño de redes de transporte urbano sustentable, *Mecánica Computacional XL*, 1117-1126, 2023.
- Huang, Y., Chu, D., Deng, Y y Cheong K. H. The capacity constraint physarum solver, *Journal of Computational Science* 62, 101725, 2022.
- Sheffi, Y., *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1985.
- Xu, S., Jiang, W., Deng, X. Y. y Shou, Y. A modified Physarum-inspired model for the user equilibrium traffic assignment problem, *Applied Mathematical Modelling* 55, 340-353, 2018.